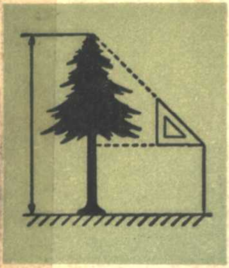


青年自学丛书

数　　学

上海人民出版社

青年自学丛书

统一书号: 13171·131
定　　价: 0.60 元

青年自学丛书

数　学

（上　册）

上海人民出版社

青年自学丛书
数　学
（上　册）
上海师范大学数学系　编
上海人民出版社出版
（上海绍兴路5号）
新华书店上海发行所发行　上海商务印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 11.375　字数 250,000
1975年5月第1版　1975年5月第1次印刷
印数 1—200,000
统一书号：13171·131　定价：0.60元

毛主席语录

农村是一个广阔的天地，在那里是可以大有作为的。

自然科学是人们争取自由的一种武装。人们为着要在社会上得到自由，就要用社会科学来了解社会，改造社会进行社会革命。人们为着要在自然界里得到自由，就要用自然科学来了解自然，克服自然和改造自然，从自然里得到自由。

《青年自学丛书》编辑说明

毛主席教导我们："**知识青年到农村去，接受贫下中农的再教育，很有必要。**"成千上万的知识青年，响应毛主席的伟大号召，满怀革命豪情，奔赴祖国的农村和边疆。他们认真读马、列的书，读毛主席的书，积极投入批林批孔，朝气蓬勃地战斗在三大革命运动的第一线，坚定地走同工农相结合的道路，对建设社会主义新农村作出了贡献，阶级斗争和路线斗争的觉悟有了很大提高。无产阶级英雄人物不断涌现，一代革命青年正在茁壮成长。这是毛主席革命路线的伟大胜利。

按照毛主席关于"**要关怀青年一代的成长**"的教导，为了适应广大上山下乡知识青年自学的需要，特编辑、出版这套《青年自学丛书》。丛书以马列主义、毛泽东思想为指导，内容包括哲学、社会科学、文学、自然科学的一些基本知识和实用农业技术知识等。我们希望，这套丛书的出版，能对上山下乡知识青年的学习起积极作用，有助于他们进一步提高路线斗争觉悟、政治理论水平和文化科学水平，在又红又专的道路上阔步前进，更好地适应建设社会主义新农村和各项事业发展的需要。

我们对大力支持这套丛书的出版工作的有关单位和作者，表示衷心的感谢，并欢迎广大读者对这套丛书提出意见和批评，以便改进。

上海人民出版社

编者的话

“农村是一个广阔的天地，在那里是可以大有作为的。”广大知识青年遵照伟大领袖毛主席的教导，奔赴农村干革命，以实际行动向资产阶级法权挑战，在三大革命斗争中，作出了应有的贡献.

在建设社会主义新农村的过程中，很多地方需要应用数学知识. 为了帮助广大青年学习初等数学，我们编写了这本《数学》，分上下两册. 上册包括数，式，三角函数和三角形，农村简易测量，任意角三角函数，一次函数和直线等六章；下册有抛物线、二次函数和一元二次方程，圆、椭圆和双曲线，其他几种常用曲线，对数和几种计算工具，优选法和统筹方法，数理统计方法简介等六章.

我们力求改革旧的数学体系，对内容的取舍，例题的配备，尽可能根据农村实际. 本书在介绍了一段内容之后，配有几道练习题，供读者练习，答案即附在下面方括号内. 每节之后的习题答案，则附于书后附录中. 本册附录中还排有英文字母、希腊字母及其读音表，常用的计量单位及其换算表，平方根表和三角函数表，以备读者查阅.

由于我们对马列主义、毛泽东思想学习不够，思想水平不高，又缺乏实践经验，书中缺点错误一定很多，欢迎读者批评指正。

编　　者

1974 年 12 月

目录

第一章　数

第一节　简单几何图形中的一些数量关系

人们在生产实践和日常生活中接触到各种物体，它们都具有一定的形状，例如三角形的屋架、长方形的台面、圆形的车轮等等．许多形状多次反映到人们的头脑里，就形成了几何图形的概念．这里的三角形、长方形和圆都是几何图形。研究和掌握几何图形的基本性质和数量关系，是为了分析和解决有关的实际问题，改造客观世界．

一、线段的度量

一段拉直的绳子，黑板的边沿等等都是有两个端点的线，这种线叫做线段．如果以 A 和 B 表示线段的两个端点，那么这条线段就可以用 AB 来表示(图 1-1)．把线段向一个方向无限延长所形成的几何图形，叫做射线(图 1-2)．把线段向两个方向无限延长所形成的几何图形，叫做直线 (图 1-3)．

图　1-1

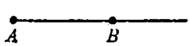


图　1-2

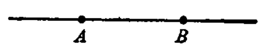


图　1-3

木工划线时，先固定墨线的两端，然后弹线，就在木板上

画出一条直线. 从中我们知道:过两点能够画也只能够画一条直线,也就是:两点决定一直线.

每一条线段都界于两个端点之间,它们都有一定的长度.要度量一条线段的长度,需要选定一个长度单位. 假定选取一厘米做长度单位,用它去度量线段 AB. 如果线段 AB 刚好是1厘米的5倍,那么线段 AB 的长度就是5厘米;如果刚好是1厘米的三分之一,那么线段 AB 的长度就是1/3厘米(图1-4). 因此,只要长度单位选定了,线段的长度都可以用一个数来表示. 通常我们把联结两点的线段的长度叫做两点间的距离.

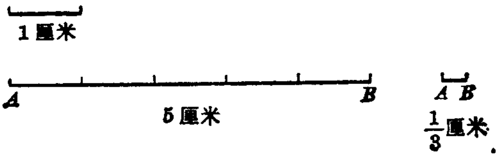


图 1-4

二、角的度量

时钟长、短针之间和台面相邻两边之间都形成一个角.从一点引出两条射线所组成的图形就是角. 角也可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而形成的. 如图1-5的角,可以看成是由射线 OA 绕端点 O 旋转到 OB 而形成的. 端点 O 叫做角的顶点;射线的起始位置 OA 叫做角的始边,终止位置 OB 叫做角的终边. OA 和 OB 都叫做角的边. 以 O 为顶点,OA 和 OB 为两边的角记为 $\angle AOB$. 在不会与其他角混淆的情况下,可简记为 $\angle O$. 有时为了简便起见,在角里注上数字,例如图1-6里的 $\angle 1$, $\angle 2$.

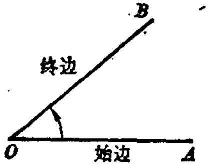


图 1-5

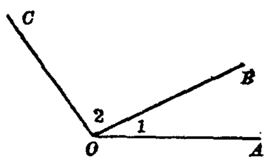


图 1-6

当射线转到和始边成一直线时，这样所成的角叫做平角(图1-7). 平角的一半叫做直角(图1-8). 常用的三角尺其中最大的一个角就是直角.

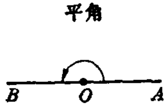


图 1-7

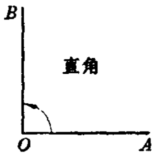


图 1-8

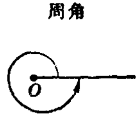


图 1-9

如果射线继续旋转下去，回到它原来的位置，这时所成的角叫做周角(图1-9). 可以看出，周角的一半就是平角.

小于直角的角叫做锐角(如图1-6的$\angle AOB$)；大于直角而小于平角的角叫做钝角(如图1-6的$\angle AOC$).

为了要度量一个角的大小，需要选定一个角度单位. 习惯上常把一个周角分成360等分，每一份叫做1度，记为1°；再把1度的角分成60等分，每一份叫做1分，记为$1'$；把1分的角再分成60等分，每一份叫做1秒，记为$1''$. 这就是说

$$\text{周角}=360^\circ,\quad 1^\circ=60',\quad 1'=60''.$$

于是我们可得到

$$\text{平角}=180^\circ,\quad \text{直角}=90^\circ.$$

我们通常用量角器来量角的大小. 如图1-10所示，把量

角器上的圆心放在角的顶点上，并使量角器上 0° 的刻线与角的一边重合，这时角的另一边在量角器上所对的读数就是这个角的度数．在图 1-10 中，$\angle AOB=50°$。

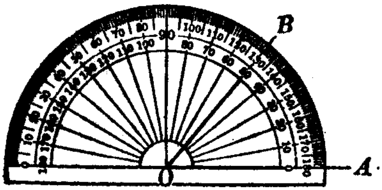


图 1-10

练习

1．把角的两边画得长一些或短一些，会影响角的大小吗？

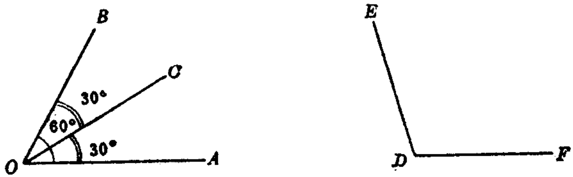
2．用量角器画出下列各角：37°；165°；90°．

3．进行下列换算：

(1) $15°=$_____′；　　(2) $15'=$_____°；

(3) 周角的 $\frac{1}{24}=$_____°．

4．角平分线把一个角平分为两，如附图 (1) 中的 OC．用量角器量出附图 (2) 中 $\angle EDF$ 的度数，然后画它的角平分线．



(1)　　(第 4 题)　　(2)

[3．(1) 900′；　(2) $\frac{1}{4}$°；　(3) 15°.]

三、垂线和平行线

屋架的下弦杆和中柱，下弦杆和房屋的柱子都相交成直

角(图 1-11). 这些客观存在的事物反映到人们的头脑里，就形成两条直线互相垂直的概念.

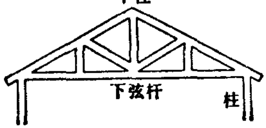


图 1-11

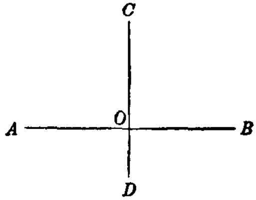


图 1-12

一般地说，当两条直线相交成直角时，这两条直线叫做互相垂直，其中一条叫做另一条的垂线，交点叫垂足. 两直线互相垂直，用符号“⊥”表示. 例如在图 1-12 中，AB 和 CD 互相垂直，可记为 $AB\perp CD$ 或 $CD\perp AB$, O 是垂足.

在生产实践中，经常要遇到这类问题：经过一点 P，作已知直线 AB 的垂线. 我们可以利用三角尺来作垂线. 如图 1-13 所示，以一个三角尺的一边与 AB 重合，以另一个三角尺的一条直角边沿 AB 移动，使另一条直角边通过点 P. 过 P 作直线 PQ，这就是要作的 AB 的垂线，Q 是垂足. 在连接点 P 和直线 AB 上任意一点的所有线段中，PQ 最短. 线段 PQ 的长度叫做点 P 到直线 AB 的距离.

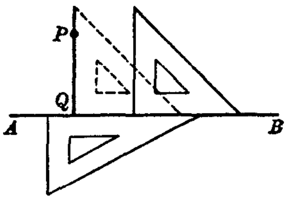


图 1-13

铁路上两条笔直的铁轨都垂直于枕木，门框的两条对边都垂直于门槛，这些事实使我们形成平行线的概念.

一般地说，垂直于同一条直线的两条直线，叫做互相平行，其中一条叫做另一条的平行线. 两条直线互相平行用符

号“∥”表示．例如图 1-14 所示，$PQ\perp AB$，$RS\perp AB$，那么 PQ 与 RS 是互相平行的，可记为 $PQ\parallel RS$ 或 $RS\parallel PQ$．线段 QS 的长度叫做平行线 PQ 与 RS 间的距离．两条铁轨间的枕木都是一样长的，这就是说，两条平行线间的距离是处处相等的．工人师傅常常运用这个道理来划平行线．如图 1-15，以平台为基准面，用高度游标卡尺在工件上先划一条直线，再将划针头的高度降低一定的距离，划出与它平行的直线．

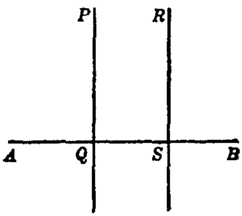


图 1-14

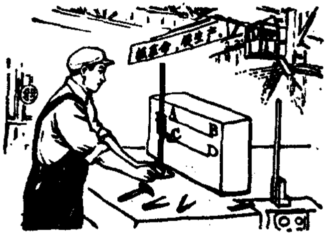


图 1-15

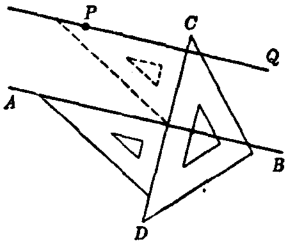


图 1-16

在图纸上，过直线 AB 外的一点 P 作 AB 的平行线，可利用一副三角尺来进行．如图 1-16，以第一个三角尺的一条直角边与 AB 重合，另一条直角边与第二个三角尺的 CD 边重合，把第一个三角尺沿 CD 边移动，使它的直角边通过点

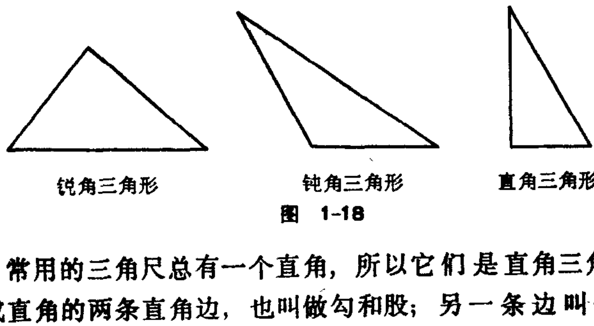
P，画直线 PQ. PQ 就是所要作的平行线.

四、三 角 形

我们经常在房屋的人字架和铁桥的钢架(图 1-17)上看到所谓三角形结构，它们是由三个角和三条边所组成的几何图形. 这样的图形叫做三角形.

图 1-17

三角形的三个内角都是锐角的，叫做锐角三角形；如果有一个内角是直角就叫直角三角形；有一个内角是钝角就叫钝角三角形，如图 1-18 所示.

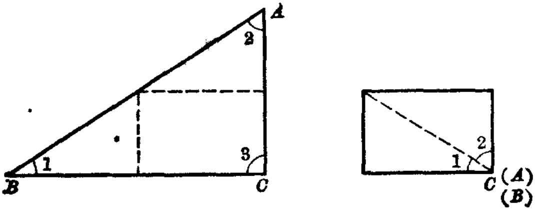


锐角三角形　　钝角三角形　　直角三角形

图 1-18

常用的三角尺总有一个直角，所以它们是直角三角形. 形成直角的两条直角边，也叫做勾和股；另一条边叫做斜边，又叫弦. 在每个直角三角形里，除了直角以外，其余两个角之间有什么关系呢？毛主席教导我们："**一切真知都是从直接经验发源的。**"我们用纸剪一个直角三角形 ABC，如图 1-19 (1) 所示. 把它的两条直角边 AC，BC 分别对折，使 $\angle A$，$\angle B$ 的顶点 A，B 都和直角顶点 C 重合，成为图 1-19

(2) 的形状．可以发现，$\angle A$ 和 $\angle B$ 的和是 $90°$，它们都是锐角．这就是说，直角三角形两锐角之和是 $90°$．那么很明显，直角三角形三内角之和是 $180°$．



(1)　　　　(2)

图 1-19

对于任意三角形的三个内角又有什么关系呢？在任一三角形 ABC 中，从一个顶点 C，根据作垂线的方法，向对边 AB 画垂线 CD(图 1-20)．CD 叫做三角形 ABC 底边 AB 上的高．

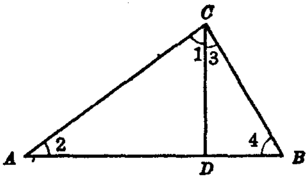


图 1-20

这样把任意三角形分成两个直角三角形．从图中可以看到，

$$\begin{aligned}&\angle A+\angle B+\angle C\\&\quad=\angle 2+\angle 4+(\angle 1+\angle 3)\\&\quad=(\angle 2+\angle 1)+(\angle 3+\angle 4)\\&\quad=90°+90°=180°.\end{aligned}$$

这是一个十分重要的结论：三角形三内角的和等于 $180°$．

如果延长三角形 ABC 的一边 AB 到 D (图 1-21)，那么

$$\begin{aligned}\angle CBD&=180°-\angle B\\&=\angle A+\angle B+\angle C-\angle B\\&=\angle A+\angle C.\end{aligned}$$

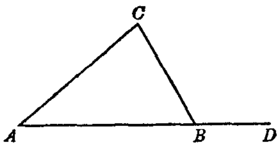


图 1-21

$\angle CBD$ 叫做 $\triangle ABC$ (“$\triangle$”表示“三角形”) 的一个外角．这

里，我们得到另一个结论：三角形的一个外角，等于和它不相邻的两个内角的和。

有了三角形三内角的数量关系之后，我们很容易求出四边形的四个内角的和。在四边形 $ABCD$ 中画对角线 AC（图 1-22），把四边形分为两个三角形。那么

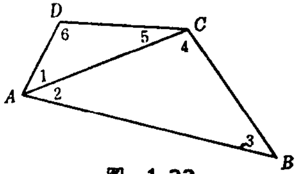


图 1-22

$$
\begin{aligned}
&\angle A+\angle B+\angle C+\angle D \\
&\quad =\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4+\angle 5+\angle 6 \\
&\quad =(\angle 1+\angle 5+\angle 6)+(\angle 2+\angle 3+\angle 4) \\
&\quad =180^\circ+180^\circ=360^\circ.
\end{aligned}
$$

就是：四边形四个内角的和等于 360°。

下面我们要从这个结论推出有关平行线的若干性质。如图 1-23 所示，$AB\perp CD$，$EF\perp CD$，因而 $AB\parallel EF$（垂直于同一条直线的两条直线互相平行）。作任一直线 GH 与 AB 和 EF 相截。由 $\angle 5+\angle 6=180^\circ$（两直角的和）可知

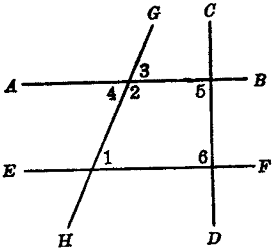


图 1-23

$$\angle 1+\angle 2=180^\circ$$

（四边形四内角之和等于 360°）；同时

$$\angle 3+\angle 2=180^\circ.$$

从这里可以看出，$\angle 1$ 和 $\angle 3$ 都等于 $180^\circ-\angle 2$，所以它们是相等的，即

$$\angle 1=\angle 3.$$

再根据 $\angle 2+\angle 4=180^\circ$，又得到

$$\angle 1=\angle 4.$$

一般地说，两条直线被第三条直线所截，构成八个角，如图 1-24 所示. 我们称 $\angle 1$ 和 $\angle 2$，$\angle 3$ 和 $\angle 4$，$\angle 5$ 和 $\angle 6$，$\angle 7$ 和 $\angle 8$ 为同位角；$\angle 2$ 和 $\angle 7$，$\angle 3$ 和 $\angle 6$ 为内错角. 前面的事实告诉我们：如果两条平行直线被第三条直线所截，那么同位角相等，内错角也相等.

反过来，两条直线被第三条直线所截，如果同位角或者内错角相等，那么这两条直线一定平行.

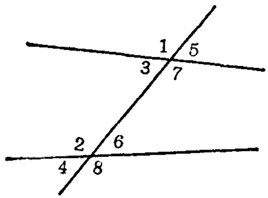


图 1-24

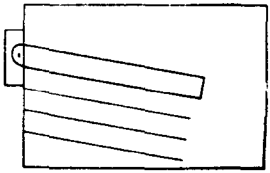
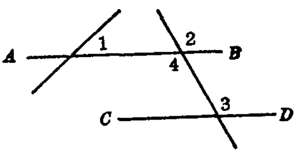


图 1-25

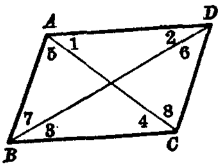
工人师傅运用这个道理，常用活络角尺来作平行线. 把扳成一定角度的活络角尺贴紧木板的一边，并从一个位置移到另一个位置，就能划出一条条平行直线(图 1-25).

练习

1. 图中哪些角是同位角？哪些角是内错角？



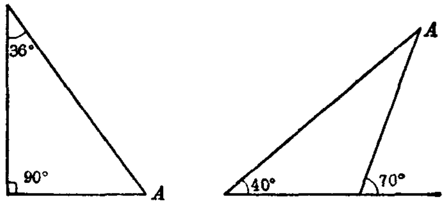
(第 1 题)



(第 2 题)

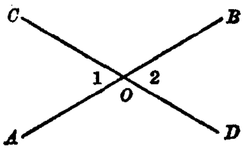
2. 四边形 $ABCD$ 中，$AB \parallel CD$，$BC \parallel AD$，这样两对边相互平行的四边形叫做平行四边形. 指出 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$，$\angle 4$，$\angle 5$，$\angle 6$，$\angle 7$，$\angle 8$ 中哪些是相等的.

3．求下列各图形中的未知角 A。

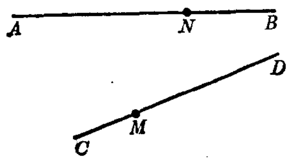


（第 3 题）

4．如图，$\angle 1$ 和 $\angle 2$ 叫做对顶角，试说明对顶角相等.



（第 4 题）



（第 5 题）

5．画出图中表示点 M 到直线 AB 的距离的线段，表示点 N 到直线 CD 的距离的线段，表示点 M 到点 N 间的距离的线段.

五、圆

在三大革命实践中，我们常常遇到圆形的物体，例如自行车的轮胎，机器上的飞轮等．圆的特征是圆周上所有的点到一个定点（叫做圆心）的距离是一个定长．连接圆心和圆上任何一点的线段叫做圆的半径（如图 1-26 中的 OE，OA 等）．当圆心和半径确定以后，我们就可以用圆规把圆画出来．两条半径 OA 和 OB 的夹角 $\angle AOB$ 叫做圆心角．圆周上任意两点间的部分叫做圆弧（如弧 AB，记作 $\overset{\frown}{AB}$）．连接弧的两个端点的线段叫做弦（如线段 AB）．过圆心的弦叫做直径（如 CD）．显然，直径是半径的两倍，即 $CD=2OE$.

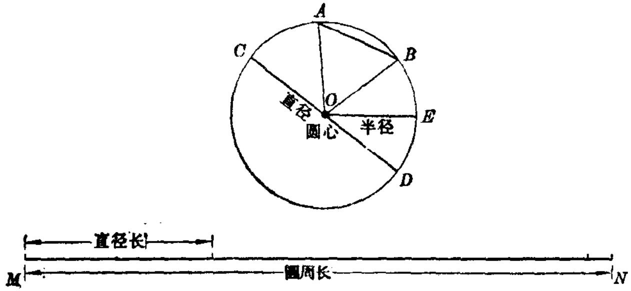


图 1-26

现在我们来看圆周长与直径的数量关系．把绳子绕圆一周，然后拉直成线段 MN（图 1-26），再用直径 CD 去量 MN．可以看到，MN 比直径的三倍长一点，而比直径的四倍短．早在公元三世纪，我国劳动人民已算出圆周长是直径的 3.1416 倍．事实上，这个倍数是一个无限不循环小数，它的值是 3.141592…，常用字母 π 表示，叫做圆周率．

$$圆周长=\pi\times直径=2\times\pi\times半径,$$

圆周率 π 可根据需要取近似值 3.1416 或 3.14 等．

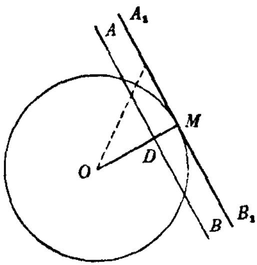


图 1-27

无限不循环小数既不是整数，也不是分数，我们称它为无理数．圆周率 π 只是无理数中的一个．

下面再研究直线和圆的相对位置关系．假如一条直线和圆有两个交点，那么这条直线就叫做圆的割线．在图 1-27 中，AB 是圆 O 的割线．

作垂直于 AB 的半径 OM，交 AB 于 D．因 OD 小于 OM，所以割线 AB 与圆心的距离小于半径．把割线 AB 保持垂直于 OM 向点 M 平行移动，可以直

观地看到，割线与圆的两个交点不断地向点 M 靠拢．当割线到达 A_1B_1 的位置，即它经过半径 OM 的端点 M 时，A_1B_1 与圆 O 只有一个公共点 M． A_1B_1 叫做圆 O 的切线，公共点 M 叫做切点．

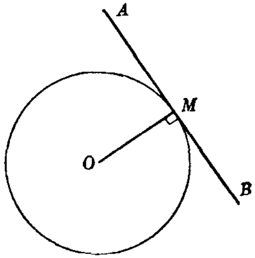


图 1-28

很明显，圆的切线垂直于过切点的半径；它与圆心的距离等于圆的半径；切线上其他的点与圆心的距离都大于圆的半径．

反过来，如图 1-28，经过半径 OM 的外端 M，画 OM 的垂线 AB，那么 AB 就是圆 O 的切线．

练习

半径为 6 厘米的圆，它的圆周的四分之三是多少？　［28.26 厘米］

六、用字母代表数

毛主席教导我们："人们总是首先认识了许多不同事物的特殊的本质，然后才有可能更进一步地进行概括工作，认识诸种事物的共同的本质。"

一块长方形土地的长是 30 米，宽是 20 米，那么这块土地的面积是

$$30\times20=600 \text{ 平方米}.$$

计算任何一个长方形的面积，总是长乘宽，就是

$$\text{长方形的面积}=\text{长}\times\text{宽}.$$

如果以字母 a 表示长，b 表示宽，S 表示长方形的面积，那么上式可以简记为

$$S=a\times b.$$

为了方便，在字母相乘时，乘号可以省略或简记为"·"，因此

上式还可以写做

$$S=ab \text{ 或 } S=a\cdot b.$$

这是一种表示长方形面积和边长之间关系的最简单明了的方法.

我们知道,任一长方体的体积总是长、宽、高相乘的积,即

$$\text{长方体的体积}=\text{长}\times\text{宽}\times\text{高}.$$

如果以字母 a, b 和 h 分别表示长、宽和高, V 表示体积(图1-29), 那么上式可简记为

$$V=a\times b\times h \text{ 或 } V=abh.$$

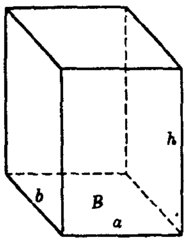


图 1-29

如果用 B 表示长方体的底面积, 即 $B=ab$. 于是有

$$V=Bh.$$

就是说, 长方体的体积等于底面积乘高.

上面我们已经知道,

$$\text{圆周长}=\pi\times\text{直径}=2\times\pi\times\text{半径}.$$

如果我们用 C 表示圆周长, D 表示直径, R 表示半径, 那么就有

$$C=\pi D=2\pi R.$$

我们在算术里知道, 任何两个数相加或相乘, 交换位置, 和或积都不变. 例如

$$4+5.2=5.2+4,\ 4\times5.2=5.2\times4.$$

用 a 和 b 表示任何两个数,那么就有

$$a+b=b+a \text{ 和 } ab=ba.$$

在算术里,同分母的分数相加,分母不变,分子相加,例如

$$\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{1+3}{5}.$$

用 a 表示分母；b 和 c 分别表示两个分数的分子，那么就有

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a}.$$

从以上可以看出，用字母代表数后，可以清楚地表现出事物数量的内在规律，以及数的运算规律和法则.

小　　结

1．数和形的概念都来自客观世界，不是人们头脑中固有的.

2．垂线

(1) 相交成直角的两条直线叫做互相垂直，交点叫做垂足.

(2) 过一点可以向直线作一条垂线. 界于定点和垂足间的线段的长度就是这点到直线的距离，它是从点到直线上各点间距离最短的一条.

3．平行线

(1) 垂直于同一条直线的两条直线叫做互相平行.

(2) 从平行线中的一条上任何一点到另一条的距离叫做这两条平行线间的距离，它们是处处相等的.

(3) 如果两条平行线被第三条直线所截，那么同位角相等，内错角相等.

4．三角形里各个角之间的数量关系

(1) 三角形三个内角的和是 $180°$.

(2) 三角形的外角等于不相邻的两个内角的和.

5．圆

(1) 圆上每一点到定点的距离都相等，这个距离叫做圆的半径，定点叫做圆心.

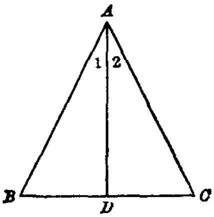
(2) 连接弧的两个端点的线段叫做弦，过圆心的弦叫做直径.

(3) 圆周长等于半径的 2π 倍.

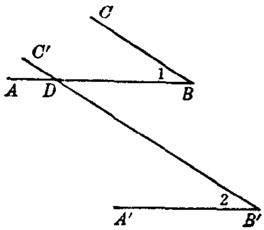
(4) 圆的切线垂直于过切点的半径. 经过半径外端，并且垂直于半径的直线是圆的切线.

习　　题

1．在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle C$，$AD\perp BC$．$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 是否相等？



（第 1 题）



（第 2 题）

2．如图，$AB\parallel A'B'$，$BC\parallel B'C'$．$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 相等吗？

3．如图，$AB\perp A'B'$，$CD\perp C'D'$．$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 为什么相等？

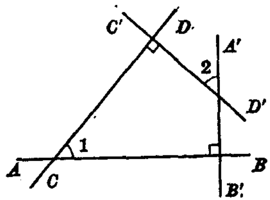
4．用字母 a 表示一个数，把下面的话写成数学式子：

(1) 这个数的平方；

(2) 这个数的立方的一半；

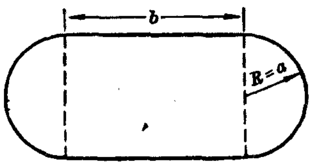
(3) 这个数与它的一半的和；

(4) 这个数与 3 的和的平方．



（第 3 题）

5．某校操场的跑道，尺寸如图所示（单位：米，R 代表半径）．写出它一圈长 C 的公式．如果 $a=36\text{m}$，$b=87\text{m}$，这圈跑道长多少米？



（第 5 题）

第二节　正数和负数

一、为什么数的前面要添正号或负号

在生产实践中常会遇到具有相反意义的量，例如：

温度有零上或零下；　　水位有上升或下降；

产量有增加或减少；　　……………………

列宁说："**自然界的（也包括精神的和社会的）一切现象和过程具有矛盾着的、相互排斥的、对立的倾向。**"

就温度来说，有零上与零下的分别．如果用 5° 表示零上五度，那么零下五度该怎么表示呢？在数学里常在 5° 的前面添一个"－"（读作"负"）号来表示，即零下五度记为 －5°．下表是上海地区在 1951～1970 年中各月的最低温度：

月　份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
温度（°C）	－9.4	－7.9	－5.4	0.0	6.9	12.3	18.9	19.2	12.4	1.7	－3.8	－8.5

从表上可以清楚地看出，1，2，3，11 和 12 月份的温度都在零下，而其他各月份的温度都不在零下．用添加符号的方法，就把相反意义的量区别开来了．

我们把前面添上"－"号的数叫做负数，如 －4，－8，$-\frac{1}{2}$，－3.5 等都是负数；相对地讲，4，8，$\frac{1}{2}$，3.5 等数就叫做正数．有时为了突出数的正负性，在正数前面添上一个"＋"（读作"正"）号来表示，例如 4，8，$\frac{1}{2}$，3.5 可以写成 ＋4，＋8，$+\frac{1}{2}$，＋3.5．

数 0 既不是正数，又不是负数，是唯一的中性数．恩格斯指出：“**零是任何一个确定的量的否定，所以不是没有内容的。相反地，零是具有非常确定的内容的。**”例如摄氏 0° 表示通常情况下水结成冰时的一个确定的温度．

为了区别具有相反意义的量，总是把其中一种意义(如增加，上升等)规定为正，与它相反意义的量(如减少，下降等)规定为负．例如

产值增加 10% 记为 $+10\%$，减少 5% 记为 -5%．

我们把正整数、零、负整数称为整数．整数和分数统称为有理数．所有这些有理数都可以概括成有限小数或无限循环小数，例如 $3=3.0$，$-\dfrac{1}{2}=-0.5$，$\dfrac{2}{3}=0.666\cdots$等．

前面学到的 π 是无限不循环小数．无限不循环小数既不是整数，也不是分数，我们称它为无理数．有理数和无理数合称为实数．由于社会实践的需要，人们对数的认识得到不断的扩充．现归纳如下：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\left.\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\ \text{零}\\ \text{负整数}\end{cases}\\ \text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\ \text{负分数}\end{cases}\end{cases}\right\}\text{有限小数或无限循环小数}\\ \text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\right\}\text{无限不循环小数}\end{cases}$$

今后在本书中所讲的数或用字母表示的数都是实数．

二、点的坐标

我们常常看到钢皮尺用刻度表示长度，称杆用刻度表示重量，温度计用刻度表示温度．它们的实质都是在一条直线

上用点来表示一个数.

把温度计横放成水平位置，如图 1-30 所示，零上的刻度在右，零下的刻度在左．零上的温度用正数来表示，零下的温度用负数表示．从温度计上可以看到，正数、负数和零都能用直线上的刻度表示出来，正数在零的右边，负数在零的左边．

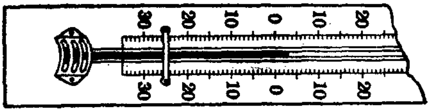


图 1-30

现在我们来说明怎样用直线上的点来表示实数．任意画一条直线(图 1-31)，选定一个方向为直线的正向(当直线处于水平位置时，一般取从左到右的方向作为正向，并用箭头表示)．在这条直线上任取一个点 O，叫做原点，表示数 0．再取一个适当的线段作为长度单位．这样规定了方向、原点和长度单位的直线叫做数轴．

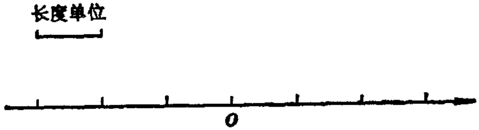


图 1-31

我们可以用数轴上的点来表示数．如图 1-32，点 A 在原点右边 2 个单位长度处，点 A 表示 2；点 B 在原点左边 $\frac{1}{2}$ 单位长度处，点 B 表示 $-\frac{1}{2}$．2 和 $-\frac{1}{2}$ 分别叫做点 A 和点 B 的坐标．原点 O 的坐标是 0。

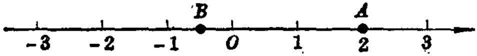


图 1-32

反过来，任何一个数都可以用数轴上一个确定的点来表示．要在数轴上找到表示 $2\frac{1}{2}$ 的点，可从原点起向右取 $2\frac{1}{2}$ 个单位长，得点 A（图 1-33）．同样，可以在数轴上从原点起向左取 3.5 个单位长，找到表示 -3.5 的点 B．

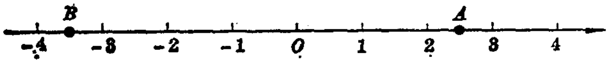


图 1-33

容易看出，在数轴上和原点距离相等的两个点的坐标只差一个符号，例如 2 与 -2，$3\frac{1}{2}$ 与 $-3\frac{1}{2}$ 等．我们把数轴上表示一个实数的点离开原点的距离叫做这个数的绝对值，用记号“| |”表示．如 2 和 -2 的绝对值都是 2，$3\frac{1}{2}$ 和 $-3\frac{1}{2}$ 的绝对值都是 $3\frac{1}{2}$，记为 $|2|=2$，$|-2|=2$ 和 $\left|3\frac{1}{2}\right|=3\frac{1}{2}$，$\left|-3\frac{1}{2}\right|=3\frac{1}{2}$．显然 $|0|=0$．我们把两个绝对值相等而符号相反的数互称为反数，例如 -2 是 2 的反数，2 是 -2 的反数．

从上面所说的可以知道，正数的绝对值就是这个数本身，例如 $|2|=2$，$|5.2|=5.2$；负数的绝对值就是这个数的反数，例如 $|-2|=2$，$|-5|=5$．

在数轴上，只要一个数就可以确定一个点的位置．那么

在平面上怎样确定一个点的位置呢？

在一块长方形的钢板上有一个孔．为了确定这个孔的中心的位置，工人老师傅以钢板的左边和下边为基准线，从孔的中心分别向左边和下边作垂线(图 1-34)，量得这两条线段的长度分别为 50 毫米和 100 毫米，那么孔心的位置就可以用两个数 50 与 100 来确定．

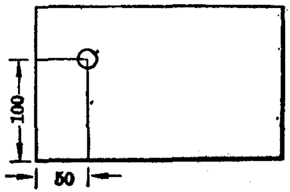


图 1-34

在日常生活中也有这样的事实，如剧场里的坐位是用几排几座来确定的．这也是用两个数来确定平面上一个点的位置．

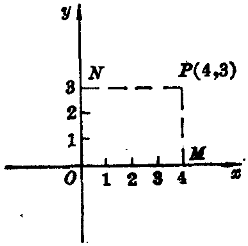


图 1-35

把这个方法运用到数学上来，如图 1-35 所示，在平面内作互相垂直而相交于原点 O 的两条数轴：x 轴和 y 轴，x 轴叫做横轴，从左到右是它的正向，y 轴叫做纵轴，从下向上是它的正向．这样就在平面内建立了一个直角坐标系．

利用直角坐标系，就可以确定平面上任一点 P 的位置了．在图 1-35 中，从点 P 作横轴的垂线交横轴于点 M，点 M 在横轴上的坐标为 4；再从点 P 作纵轴的垂线交纵轴于点 N，N 在纵轴上的坐标为 3．很明显，点 P 的位置就可用这对数 $(4, 3)$ 来确定．

反过来，给定一对数 $(4, 3)$，也可以在平面上确定一个点．过横轴上以 4 为坐标的点 M 作横轴垂线 MP，再过纵轴上以 3 为坐标的点 N 作纵轴的垂线 NP，两条垂线相交于点 P．点 P 就是由这对数 $(4, 3)$ 所确定的．

一般地说，平面上的每一点 P 确定一对数 (x, y)；反过来，每一对数 (x, y) 也确定平面上的一点 P. 这样，我们就建立了平面上的点与数对之间的一一对应. (x, y) 称为点 P 的坐标. 这里的 x 是 P 的横坐标；y 是 P 的纵坐标，它们的顺序不可颠倒. 坐标为 (x, y) 的点 P 通常记为 $P(x, y)$. 特别，原点 O 的坐标是 $(0, 0)$. x 轴上一切点的坐标是 $(x, 0)$；y 轴上一切点的坐标是 $(0, y)$.

直角坐标系把平面分成 I、II、III、IV 四个部分，分别叫做第一、第二、第三和第四象限. 不同象限中的点，它们的坐标有正有负，如图 1-36 所示. 图 1-37 中各点的坐标是：$P(4, 5)$, $Q(-3, 6)$, $R(-2, -3)$, $S(5, -2)$.

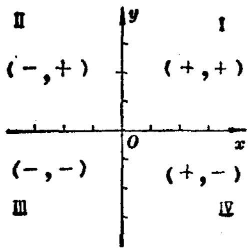


图 1-36

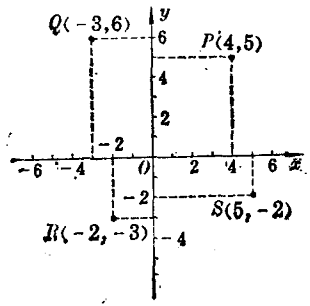


图 1-37

在实际工作中，为了便于观察，常用类似坐标方法画出表示数量变化情况的图形.

例如某生产队棉花密植试验，分每亩 3000 株，4000 株，5000 株，6000 株，7000 株，8000 株进行对比(可在小块面积如 $\frac{1}{10}$ 亩里试验，把产量折合成亩产量). 试验结果如下表：

密植程度(株/亩)	3000	4000	5000	6000	7000	8000
亩产籽棉(斤)	283.3	303.3	326.7	340.3	300.0	263.3

根据上表，我们可以画出表示密植程度与亩产量的关系图(图1-38)。

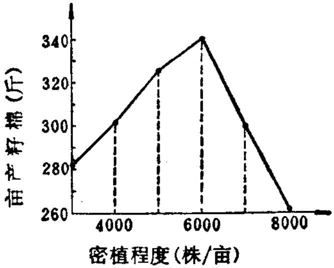


图 1-38

观察这个图可以知道，每亩6000株产量最高，而高于6000株时产量下降较快．因此根据该队情况，密植程度以稍低于6000株为好．

三、数的大小比较

我们懂得怎样比较正数和零、正数和正数的大小，例如5大于3，$\frac{1}{4}$小于$\frac{1}{2}$，0.2大于0等等．如果用符号“<”表示小于，符号“>”表示大于，那么就有$5>3$，$\frac{1}{4}<\frac{1}{2}$，$0.2>0$等等．

对于正数和负数、负数和负数、负数和零，怎样来比较它们的大小呢？

从温度计上看，零上的温度比零下的温度高，零下的温度越往下面越低．

把这个道理运用到数轴上去，就是数轴上的点所表示的

数，右边的比左边的大，越向右边越大，越向左边越小．因此

1．正数大于0，也大于一切负数；

2．负数小于0，也小于一切正数；

3．两个负数，绝对值大的数较小．

【例】 比较下列各数的大小：

(1) 8 和 -9．　　　(2) -0.72 和 -0.7．

(3) $-\frac{6}{7}$ 和 $-\frac{7}{8}$．　　　(4) -0.1 和 0．

解：(1) 8是正数，-9是负数，所以$8>-9$．

(2) $|-0.72|=0.72$，$|-0.7|=0.7$，因为$0.72>0.7$，所以$-0.72<-0.7$（根据上面的第3）．

(3) 本题先要化成同分母，才可进行比较．

$$\left|-\frac{6}{7}\right|=\frac{6}{7}=\frac{6\times8}{7\times8}=\frac{48}{56},\quad \left|-\frac{7}{8}\right|=\frac{7}{8}=\frac{7\times7}{8\times7}=\frac{49}{56},$$

因为$\frac{48}{56}<\frac{49}{56}$，所以$-\frac{6}{7}>-\frac{7}{8}$．

(4) -0.1是负数，所以$-0.1<0$．

小　结

1．为了表示具有相反意义的量，引进了正负数．正数、负数和零都可以用数轴上的点来表示，而数轴上的每一个点都表示一个实数．

2．一个数的绝对值是这个数在数轴上所表示的点到原点的距离．绝对值相同而符号相反的数互为反数．正数和零的绝对值是它的本身．负数的绝对值是它的反数．

3．零是介于正负数之间的唯一的中性数．正数大于零，零大于负数，负数中绝对值越大的数越小．

4．平面内的直角坐标系是由两条垂直相交的数轴组成的．平面上的点可以用一对有顺序的实数(x, y)来表示．反过来，一对有顺序的实数(x, y)确定平面上的一个点．(x, y)称为点的坐标．

习 题

1. 写出下列各数的反数：0.65； -0.618； $\frac{1}{2}$； $-\frac{2}{3}$.
2. 写出下列各数的绝对值：$-\frac{1}{2}$； 3.5； $-1\frac{1}{2}$； -6.
3. 在数轴上作出以下列各数为坐标的点：
$$4;\quad 1\frac{1}{2};\quad -1\frac{1}{2};\quad 3.5;\quad -0.3.$$
4. 在数轴上作出坐标的绝对值为4，0.5和$\frac{1}{2}$的点.
5. 在同一直角坐标系内，作出下列各点：
$P_1(-2, 1)$， $P_2(3, 4)$， $P_3(2, -4)$， $P_4(1, 2)$.
6. 比较下列各数的大小：
0.1和-100； -17.5和-18； $-\frac{4}{5}$和$-\frac{3}{4}$.

第三节 数的四则运算

一、加 法

粮仓里经常要运进或运出一定数量的粮食，如果规定运进为正，那么运出就为负．我们以两次运粮为例，来说明加法法则.

分下列几种情况来讨论：

(1) 第一次运进五千斤，第二次运进三千斤，两次共运进八千斤．即
$$(+5000)+(+3000)=+8000.$$

(2) 第一次运出五千斤，第二次运出三千斤，两次共运出八千斤．即
$$(-5000)+(-3000)=-8000.$$

(3) 第一次运进五千斤，第二次运出三千斤，两次实际上运进二千斤．即

$$(+5000)+(-3000)=+2000.$$

(4) 第一次运出五千斤，第二次运进三千斤，两次实际上运出二千斤．即

$$(-5000)+(+3000)=-2000.$$

从(1)与(2)可以看出，同号两数相加，应把两数的绝对值相加，再添上与原来两数相同的符号．

从(3)与(4)可以看出，异号两数相加，应从较大的绝对值减去较小的绝对值，再添上与绝对值较大的数相同的符号．

很明显，任何数与零相加，仍得这个数．

【例 1】 计算：

(1) $(-2)+3$；　　(2) $\left(-5\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$；

(3) $\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}$；　　(4) $\left(-2\frac{1}{2}\right)+0$.

解：(1) $(-2)+3=+(3-2)=+1$.

(2) $\left(-5\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)=-\left(5\frac{1}{2}+2\frac{1}{2}\right)=-8$.

(3) $\left(-\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=0$.

(4) $\left(-2\frac{1}{2}\right)+0=-2\frac{1}{2}$.

【例 2】 计算：

(1) $(+25)+(-17)$；　　(2) $(-17)+(+25)$.

解：(1) $(+25)+(-17)=25-17=8$.

(2) $(-17)+(+25)=25-17=8$.

一般说来，加法交换律对于实数也适用，即

$$a+b=b+a.$$

【例 3】 计算：(1) $[(+4)+(-5)]+(+2)$；

(2) $(+4)+[(-5)+(+2)]$.

解：(1) $[(+4)+(-5)]+(+2)=(-1)+(+2)=1$.

(2) $(+4)+[(-5)+(+2)]=(+4)+(-3)=1$.

一般说来，加法结合律对于实数也适用，即

$$(a+b)+c=a+(b+c).$$

因此，若干个数相加，就可以先把正数和负数分别结合在一起再相加，或先把相反数结合起来再相加. 例如

(1) $38+(-11)+8+11+(-8)$

$=38+[(-11)+11]+[8+(-8)]=38+0+0=38.$

(2) $45+(-9)+(-91)+55+(-28)+(-16)$

$=(45+55)+[(-9)+(-91)]+[(-28)+(-16)]$

$=100+(-100)+(-44)=-44.$

练习

1. 计算：(1) $(+20)+(-20)$； (2) $(-2.5)+(-4.5)$；

(3) $\left(-3\frac{1}{2}\right)+0$； (4) $(-13)+(+7)$.

2. 计算：(1) $(-6)+(+5)+(-4)+(+3)$；

(2) $(+1.5)+(-1.8)+(+0.7)$； (3) $(-20)+(+60)+(-40)$.

[1. (1)0; (2) -7; (3) $-3\frac{1}{2}$; (4) -6. 2. (1) -2; (2)0.4; (3)0.]

二、减　　法

减法是已知两数的和与其中一个加数，求另一个加数的运算，所以减法是加法的逆运算.

例如，已知 $(-2)+(+7)=+5$. 根据减法的意义，从两数的和减去一个加数就得到另一个加数，所以

$$(+5)-(-2)=+7, \qquad (1)$$

$$(+5)-(+7)=-2. \tag{2}$$

但从加法又知道，

$$(+5)+(+2)=+7, \tag{3}$$

$$(+5)+(-7)=-2. \tag{4}$$

比较式子(1)和(3)，(2)和(4)，就是

$$(+5)-(-2)=(+5)+(+2),$$

$$(+5)-(+7)=(+5)+(-7).$$

我们得到了减法的法则：减去一个数等于加上这个数的反数.

一般说来，设 a 和 b 是任意两个数，则有

$$a-b=a+(-b).$$

这个式子从左边到右边是减法向加法转化. 反过来，从右边到左边是加法向减法转化. 有了正负数之后，数的加法与减法辩证地统一起来了.

【例 4】 计算：

(1) $(+3)-(-3)$； (2) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)$.

解：(1) $(+3)-(-3)=3+3=6$.

(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(+\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)$

$$=-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}.$$

因为减法可以转化为加法，于是差的形式都可写成和的形式，例如

$$4-5+9-3=4+(-5)+9+(-3).$$

这样的和叫做代数和. 反过来，一个代数和

$$12+(-7)+(-3)+4$$

可简化为 $12-7-3+4$.

【例 5】 计算：(1) $7-(3-5)$；　(2) $7-3+5$.

解：(1) $7-(3-5)=7-[3+(-5)]=7-(-2)$

$$=7+2=9.$$

(2) $7-3+5=4+5=9$.

从这个例子可以看出，设 a, b 和 c 是任意三个数，那么

$$a-(b+c)=a-b-c.$$

根据加法结合律，我们有

$$a+(b+c)=a+b+c.$$

这两个等式说明了去括号的法则：在去括号时，括号前是"－"号的，去掉括号，括号内的各个数都变号；括号前是"＋"号的，去掉括号，括号内的各个数不变号.

【例 6】 农业上经常要计算平均亩产量. 如果八亩油菜田的亩产量分别是 257, 258, 246, 322, 270, 241, 219 和 240 斤，求平均亩产量.

解：这个问题只要把八个数相加，得 2053 斤，再除以 8 得平均亩产量 256.6 斤. 但是我们也可以用代数和的方法来计算. 任取其中的一个数作为临时标准值，例如 257. 那么各亩的产量将是

$$257,\ 257+1,\ 257-11,\ 257+65,\ 257+13,$$
$$257-16,\ 257-38,\ 257-17.$$

把它们相加，得

$$8\times 257+(1-11+65+13-16-38-17)=8\times 257-3.$$

把这个结果除以 8，得

$$257-\frac{3}{8}=257-0.4=256.6\text{ 斤},$$

这就是平均亩产量.

一般，我们在各个亩产量中任取一个作为临时标准值，求

出其他亩产量与它的差，把所得的差相加，除以亩数，得到平均差，标准值与这个平均差的和就是平均亩产量.

练习

1. 计算：(1) $(-106)-(-14)$；　(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{6}$.

2. 计算：(1) $(-12)+11+(-8)+39+27+(-35)$；

(2) $45+(-9)+(-91)+55+(-28)+(-16)$；

(3) $\left(-1\frac{1}{2}\right)+\left(-3\frac{1}{2}\right)+2\frac{2}{3}+(-8)+2\frac{1}{3}$.

[1. (1) -92；(2) $-\frac{2}{3}$.　2. (1) 22；(2) -44；(3) -8.]

三、乘　　法

水池经常要进水和放水，进水时水位就上升，放水时水位就下降. 把上升规定为正，那么下降就为负. 时间从现在算起，规定以后为正，那么以前就为负. 下面以水位的变化为例来说明乘法法则.

假定以现在的水位作为水位线 0 处(图 1-39)，我们分下面三种情况来计算水位的变化.

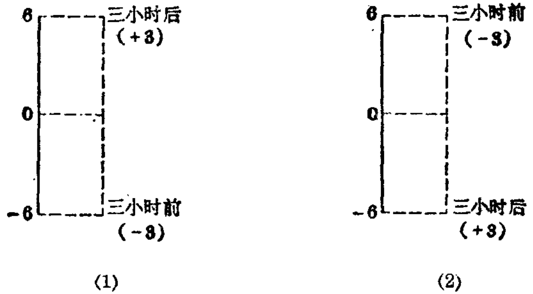


图 1-39

1. 每小时水位上升 2 厘米[图 1-39(1)].

(1) 三小时以后水位应在水位线 6 厘米处，即

$$(+2)\times(+3)=+6.$$

(2) 三小时以前水位应在水位线 -6 厘米处，即

$$(+2)\times(-3)=-6.$$

2. 每小时水位下降 2 厘米[图 1-39(2)].

(1) 三小时以后水位应在水位线 -6 厘米处，即

$$(-2)\times(+3)=-6.$$

(2) 三小时以前水位应在水位线 $+6$ 厘米处，即

$$(-2)\times(-3)=+6.$$

从上面所讲的可以看出，两数相乘，积的绝对值就是两数绝对值的积；积的符号，同号两数相乘为正，异号两数相乘为负. 很明显，零与任何数相乘仍得零.

【例 7】 计算：(1) $(-36)\times(-15)$；

(2) $(+15)\times(-36)$.

解：(1) $(-36)\times(-15)=36\times15=540$.

(2) $(+15)\times(-36)=-15\times36=-540$.

【例 8】 计算：(1) $(-5)\times(+2)$；

(2) $(+2)\times(-5)$.

解：(1) $(-5)\times(+2)=-5\times2=-10$.

(2) $(+2)\times(-5)=-2\times5=-10$.

一般说来，乘法交换律对于实数也适用，即

$$a\times b=b\times a.$$

【例 9】 计算：(1) $[(+4)\times(-5)]\times(+2)$；

(2) $(+4)\times[(-5)\times(+2)]$.

解：(1) $[(+4)\times(-5)]\times(+2)$

$$=(-20)\times(+2)=-40.$$

(2) $(+4)\times[(-5)\times(+2)]=(+4)\times(-10)=-40.$

一般说来，乘法结合律对于实数也适用，即

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c).$$

因此，若干个数相乘，可以先把其中任意几个数相乘，从而使计算过程简便些. 例如

(1) $(-6)\times(-7)\times\frac{5}{12}\times20=(-6)\times\frac{5}{12}\times20\times(-7)$

$$=\left(-\frac{5}{2}\right)\times20\times(-7)=(-50)\times(-7)=350.$$

(2) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times(-21)\times\left(-\frac{3}{5}\right)\times\frac{2}{7}=\left[\left(-\frac{5}{6}\right)\times\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$

$$\times\left[(-21)\times\frac{2}{7}\right]=\frac{1}{2}\times(-6)=-3.$$

【例 10】 计算： (1) $5\times[100+(-1)]$； (2) 5×99.

解： (1) $5\times[100+(-1)]=5\times100+5\times(-1)$

$$=500-5=495.$$

(2) $5\times99=495$.

一般地说，乘法对于加法的分配律对于实数也适用，即

$$a(b+c)=ab+ac.$$

练习

1. 计算：(1) $(+5)\times(-8)$； (2) $(-20)\times\left(+\frac{4}{5}\right)$；

(3) $(-0.4)\times(-2)$； (4) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times(+2.4)\times\left(+\frac{3}{5}\right)$.

2. 计算：(1) $(-8)\times\left[\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$；

(2) $\left(\frac{7}{9}-\frac{5}{6}+\frac{3}{2}-\frac{7}{18}\right)\times(+18)$.

[1. (1) -40； (2) -16； (3) 0.8； (4) -1.2. 2. (1) 5； (2) 19.]

四、除　　法

除法是已知两数的积和其中一个因数，求另一个因数的运算．除法是乘法的逆运算．

例如，已知

$$(-2)\times(+7)=-14,$$

根据除法的意义，积被一个因数除，就得另一个因数．所以

$$(-14)\div(-2)=+7,\text{ 又记作 }\frac{-14}{-2}=+7;$$

$$(-14)\div(+7)=-2,\text{ 又记作 }\frac{-14}{+7}=-2.$$

又例如 $(-3)\times(-5)=+15$，所以

$$(+15)\div(-3)=-5,\text{ 又记作 }\frac{+15}{-3}=-5;$$

$$(+15)\div(-5)=-3,\text{ 又记作 }\frac{+15}{-5}=-3.$$

因此，除法的法则是：商的绝对值，就是相除两数绝对值的商；商的符号，同号两数相除为正，异号两数相除为负．

必须注意，除数不能为零．

【例 11】 计算：(1) $56\div(-8)$；

(2) $(-0.144)\div(-1.2)$．

解：(1) $56\div(-8)=-(56\div8)=-7$．

(2) $(-0.144)\div(-1.2)=+(0.144\div1.2)=0.12$．

在分数乘法里，我们知道 $\frac{2}{3}\times\frac{3}{2}=1$；$3\times\frac{1}{3}=1$．当两数相乘得 1 时，这两数互为倒数．因此，$\frac{3}{2}$ 与 $\frac{2}{3}$ 互为倒数，3 与 $\frac{1}{3}$ 互为倒数．一般说来，数 a 与 $\frac{1}{a}$ 互为倒数，因为 $a\times\frac{1}{a}=1$．

由于 $-6\div2=-3$，$-6\times\frac{1}{2}=-3$，所以 $-6\div2=-6\times\frac{1}{2}$，这里，$\frac{1}{2}$ 是 2 的倒数．可以看出，a 除以 b 就是 a 乘以 b 的倒数 $\frac{1}{b}$．于是除法便可以转化为乘法了．

【例 12】 计算：(1) $2\div\frac{1}{3}$；(2) $\frac{2}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)$．

解：(1) $2\div\frac{1}{3}=2\times3=6$．

(2) $\frac{2}{3}\div\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{2}{3}\times(-4)=-\frac{8}{3}$．

在实际计算中，往往遇到加、减、乘、除几种运算同时出现在一个算式里．这时，我们总是先乘除，后加减；先括号内，后括号外；如有多重括号时，先从里面的括号算起．

【例 13】 计算：

(1) $(-1)-\left(-5\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{11}+(-8)\div[(-3)+5]$；

(2) $\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}$．

解：(1) $(-1)-\left(-5\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{11}+(-8)\div[(-3)+5]$

$$=(-1)-(-2)+(-8)\div(+2)$$

$$=(-1)-(-2)+(-4)=-3.$$

(2) $\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}$

$$=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{4}-1\right\}$$

$$=\frac{1}{4}-\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{4}{4}=1.$$

练习

1．计算：

(1) $2\frac{1}{2}\div(-1.25)$;　　　(2) $\left(-3\frac{4}{7}\right)\div\left(-1\frac{2}{3}\right)\div\left(-1\frac{1}{14}\right)$.

2．计算：(1) $\left[\left(-\frac{7}{8}\right)+\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\div(-8)$;

(2) $2\div(-2)+0\div14-(-14)\times(-2)$.

[1．(1) -2; (2) -2.　2．(1) $\frac{5}{64}$; (2) -29.]

小　　结

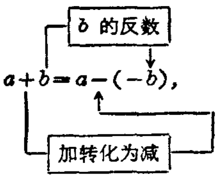
1．数的加减法法则：

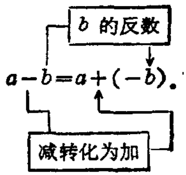
(1) 同号两数相加，绝对值相加，取原来加数的符号；

(2) 异号两数相加，从较大的绝对值减去较小的绝对值，符号与绝对值较大的数相同；

(3) 减法是加法的逆运算．减去一个数，等于加上这个数的反数；

(4) 加法和减法可以互相转化．转化的条件是把加数或减数变为原数的反数．





2．数的乘法法则：

(1) 同号两数相乘，绝对值相乘，符号为正；

(2) 异号两数相乘，绝对值相乘，符号为负；

(3) 零和任何数相乘，积为零．

3．数的除法法则：

(1) 同号两数相除，绝对值相除，符号为正；

(2) 异号两数相除，绝对值相除，符号为负；

(3) 零不能做除数．

4．数的乘法和除法可以互相转化，转化的条件是把乘数或除数变为原数的倒数．就是说，

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}, \quad a \cdot b = a \div \frac{1}{b}.$$

习　　题

1. 把下列各式化为代数和，并写成不带括号的形式：

   (1) $(-7)+(-8)-(+9)+(-1)$；

   (2) $(+2)+\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)+(-4)$.

2. 计算：(1) $(-100)\times\left[0.7+0.03-\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{10}\right)\right]$；

   (2) $1-\frac{1}{3}\div\left[-1+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]$.

3. 工人师傅加工一根直径为 30 毫米的轴，规定加工后的直径最大不能比 50 毫米大 0.015 毫米；最小不能比 50 毫米小 0.01 毫米．在图纸上记作 $50^{+0.015}_{-0.01}$，这里，右上角的数 $+0.015$ 叫做上偏差，右下角的数 -0.01 叫做下偏差．上偏差减去下偏差叫做公差．试求这个公差．.

4. 某生产队一块早稻试验田 1.2 亩，稻谷进仓过磅时每筐的重量(斤)是 97，98，101，103，105，102，100，98，99，101，96，104，103，100，105，97，求平均亩产量.

第四节　数的乘方和开方

一、乘　　方

我们知道，边长为 a 的正方形面积是 $a\times a$，可以用 a^2 来表示；棱长为 a 的正方体体积是 $a\times a\times a$，可以用 a^3 来表示(图 1-40)．一般地说，设 a 为任意一个数，那么 n 个 a (n 是大于 1 的整数)相

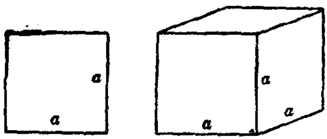


图　1-40

乘的积，可以用 a^n 来表示，即

$$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}}.$$

求这样的积的运算叫做乘方，a 叫做底，它的个数 n 叫做指数，计算的结果叫做幂．a^n 读作 a 的 n 次幂(或 n 次方)．我们可把 a 看成是 a 的一次幂，即 $a=a^1$，但指数 1 通常省略不写．

【例 1】 计算：(1) -3 的二次幂；

(2) -0.2 的三次幂；　(3) 0 的二次幂、三次幂。

解：(1) $(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=9.$

(2) $(-0.2)^3=(-0.2)\cdot(-0.2)\cdot(-0.2)$

$$=(0.04)\cdot(-0.2)=-0.008.$$

(3) $0^2=0$, $0^3=0$.

下面研究同底数幂的乘法和除法．例如

$(-2)^3\cdot(-2)^2=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$,

$(-2)^{3+2}=(-2)^5=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)$,

所以 $$(-2)^3\cdot(-2)^2=(-2)^{3+2}.$$

一般说来，当 m 与 n 为正整数时，就有

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}.$$

又如 $$(-2)^3\div(-2)^2=\frac{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}{(-2)\cdot(-2)}$$

$$=-2=(-2)^1=(-2)^{3-2};$$

$$(-2)^3\div(-2)^3=\frac{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}=1;$$

$$(-2)^2\div(-2)^3=\frac{(-2)\cdot(-2)}{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}$$

$$=\frac{1}{-2}=\frac{1}{(-2)^1}=\frac{1}{(-2)^{3-2}}.$$

一般说来，当m与n为正整数，$a\neq 0$时，就有

$$a^m\div a^n=\begin{cases}a^{m-n} & (m>n),\\ 1 & (m=n),\\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n).\end{cases}$$

毛主席教导我们："**在一定条件之下，矛盾的东西能够统一起来，又能够互相转化**"。同底数幂的除法出现了三种情况，能否创造条件使它们统一起来呢？我们来分析一下，怎样把第二、第三两种情况统一到第一种里去。

在$a\neq 0$的情况下，当$m=n$时，$a^m\div a^n=a^n\div a^n=1$，而$a^{n-n}=a^0$。我们规定

$$a^0=1.$$

例如　　$100^0=1$，$\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$，$(-3)^0=1$.

当$m<n$时，以$m=2$，$n=5$为例，$a^2\div a^5=\frac{1}{a^3}$，而

$$a^{2-5}=a^{-3}.$$

我们规定

$$a^{-3}=\frac{1}{a^3}.$$

一般地，我们规定

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n},$$

这里n是正整数。a^{-n}读作a的负n次幂。

这样，零指数和负整数指数幂都有了意义。于是在$a\neq 0$的情况下，

当$m=n$时，$a^m\div a^n=a^n\div a^n=1=a^{n-n}=a^{m-n}$;

当$m<n$时，$a^m\div a^n=\frac{1}{a^{n-m}}=a^{-(n-m)}=a^{m-n}$.

因此，在引进零指数和负整指数的条件下，幂的除法就统一于

一个公式

$$a^m \div a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0).$$

当指数出现负整数时，同底数幂的乘法法则 $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ 还是适用的．例如

$$a^3 \cdot a^{-2} = a^3 \cdot \frac{1}{a^2} = \frac{a^3}{a^2} = a^{3-2} = a^{3+(-2)}.$$

在这个基础上，就有

$$a^m \div a^n = a^{m-n} = a^{m+(-n)} = a^m \cdot a^{-n}.$$

所以幂的除法又可以统一到幂的乘法里去．

概括起来，我们得到这样一个规律：同底数幂相乘，底数不变，指数相加(出现负指数时底数不得为零)．

幂的概念给记数带来一定的方便．我们可以把任何数都改写成 $a \times 10^n$ ($a >$ 或 $= 1$ 而 < 10，n 是正整数)的形式，例如光速为 29980000000 厘米/秒，可以记为 2.998×10^{10} 厘米/秒．又如

$$31.416 = 3.1416 \times 10, \qquad 314.16 = 3.1416 \times 10^2,$$

$$0.3146 = 3.1416 \times 10^{-1}, \qquad 0.031416 = 3.1416 \times 10^{-2}.$$

在运算过程中，我们也常常利用这样的记法．例如光速每秒约 300000 公里．某一颗恒星发出的光需要 4 年时间才能到达地球．每年以 30000000 秒计算，求出这颗恒星与地球的距离．

这颗恒星与地球的距离约是

$$\begin{aligned} 300000 \times 30000000 \times 4 &= 3 \times 10^5 \times 3 \times 10^7 \times 4 \\ &= 36 \times 10^{12}\text{(公里)}. \end{aligned}$$

下面我们计算两数的积和商的幂．

$$\begin{aligned} (2 \times 3)^2 &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ &= (2 \times 2) \times (3 \times 3) = 2^2 \times 3^2; \end{aligned}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2\times2}{3\times3}=\frac{2^2}{3^2}.$$

一般地说，当 n 为正整数时，

$$(ab)^n=a^nb^n.$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\quad(b\neq0).$$

【例 2】 计算：(1) $[(-2)\times3]^3$； (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

解：(1) $[(-2)\times3]^3=(-2)^3\times3^3$

$$=(-8)\times27=-216.$$

(2) $\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$.

我们还可以看到，

$$(2\times3)^{-2}=\frac{1}{(2\times3)^2}=\frac{1}{2^2\times3^2}=\frac{1}{2^2}\times\frac{1}{3^2}=2^{-2}\times3^{-2}.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{1}{\frac{2^2}{3^2}}=\frac{3^2}{2^2}=\frac{2^{-2}}{3^{-2}}.$$

这就说明，关于积的幂和商的幂的计算公式，对负整指数也是适用的.

因为 $$\left(\frac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n,$$

所以商的幂又可以转化成积的幂来计算.

下面我们来计算幂的乘方，例如

$$(2^3)^2=2^3\times2^3=2^6=2^{3\times2}.$$

一般地说，当 m 与 n 是正整数时

$$(a^m)^n=a^{m\cdot n}.$$

【例 3】 把下列各式写成 a^n 的形式：

(1) $(2^2)^5$； (2) $[(-3)^2]^4$； (3) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3$.

解：(1) $(2^2)^5=2^{2\times5}=2^{10}$.

(2) $[(-3)^2]^4=(-3)^{2\times4}=(-3)^8$.

(3) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3=\left(\frac{2}{3}\right)^{2\times3}=\left(\frac{2}{3}\right)^6$.

公式$(a^m)^n=a^{m\cdot n}$对 m 或n为负整数时也同样适用．例如，

$$(3^{-3})^2=\left(\frac{1}{3^3}\right)^2=\frac{1}{(3^3)^2}=\frac{1}{3^6}=3^{-6}=3^{(-3)\times2}.$$

$$(3^{-2})^{-3}=\frac{1}{(3^{-2})^3}=\frac{1}{3^{-6}}=3^6=3^{(-2)\times(-3)}.$$

【例 4】 把下列各式写成a^n的形式：

(1) $(4^{-3})^3$; (2) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-2}$.

解：(1) $(4^{-3})^3=4^{(-3)\times3}=4^{-9}$.

(2) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-2}=[(2^{-1})^3]^{-2}=[2^{(-1)\times3}]^{-2}$

$=2^{(-3)\times(-2)}=2^6$.

综上所述，幂的运算法则只有三条，在 $a\neq0$, $b\neq0$, m, n 为整数的情况下：

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; (2) $(a^m)^n=a^{mn}$; (3) $(ab)^n=a^nb^n$.

【例 5】 计算：

(1) $(-3)^4$; (2) -3^4; (3) $(4\times3)^3$;

(4) -2×3^3; (5) $\dfrac{(-3)^2\times(-2)^3}{2^3\times3^2}$.

解：(1) $(-3)^4=(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)=81$.

(2) $-3^4=-(3\times3\times3\times3)=-81$.

(3) $(4\times3)^3=4^3\times3^3=64\times27=1728$.

(4) $-2\times3^3=-2\times27=-54$.

$$(5)\quad \frac{(-3)^2\times(-2)^3}{2^3\times 3^2}=\frac{(-1)^2\times 3^2\times(-1)^3\times 2^3}{2^3\times 3^2}$$
$$=(-1)^5=-1.$$

练习

1．计算：5^{-1}；212^0；1^{-10}；$(-2)^{-1}$；$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$.

2．将下列各数写成 $a\times10^n$ ($a>$或$=1$ 而<10)的形式：

(1) 地球与太阳的距离是 150000000 公里；

(2) 空气的比重为 0.001293 克/厘米^3.

3．计算：(1) $5.23\times0.00025\times6400$；(2) $\dfrac{250\times10^3}{0.005}$.

4．把下列各式写成幂的积的形式：(1) $(3\times2)^2$；(2) $(2\times3\times5)^2$.

5．把下列各式写成 a^n 的形式：$(10^3)^2$；$(2^3)^{-2}$；$[(-1)^{-2}]^{-3}$.

[1．$\frac{1}{5}$, 1, 1, $-\frac{1}{2}$, 8.　　2．(1) 1.5×10^8 公里；

(2) 1.293×10^{-3} 克/厘米^3.　　3．(1) 8.368；(2) 5×10^7.

4．(1) $3^2\times2^2$；　　(2) $2^2\times3^2\times5^2$.

5．10^6; 2^{-6}; -1^6.]

二、开　　方

开方是乘方的一种逆运算．例如边长为 6 厘米的正方形钢板，它的面积是 $6^2=36$ (平方厘米)．反过来，如果要截一块 36 平方厘米的正方形钢板，它的边长应该是多少？这就是求一个数 x，使 $x^2=36$．因 $6^2=36$，又 $(-6)^2=36$，但钢板的边长不可能是负的，所以 $x=6$，即钢板的边长应是 6 厘米．

一般地，如果一个数 a 是另一个数 x 的 n 次方(n 是正整数)，就是 $x^n=a$，那么 x 叫做 a 的 n 次方根．求方根的运算叫做开方，a 叫做被开方数，n 叫做根指数．

因为 $6^2=36$，$(-6)^2=36$，所以 6 和 -6 都是 36 的二次方根(或平方根)．我们把 6 叫做 36 的正平方根，而把 -6 叫

做 36 的负平方根.

又如

$$13^3=2197,\ (-13)^3=-2197,$$

所以 13 是 2197 的三次方根，而 -13 不是 2179 的三次方根，它是 -2197 的三次方根. 三次方根又叫做立方根.

因为 $0^2=0$, $0^3=0$, 等等，所以 0 的任何次方根都等于 0.

任何实数的偶次方不能是负数，所以我们不去讨论负数的偶次方根.

a 的 n 次方根，用记号 $\sqrt[n]{a}$ 来表示. 例如 8 的立方根用 $\sqrt[3]{8}$ 表示，-32 的五次方根用 $\sqrt[5]{-32}$ 表示.

由于正数的偶次方根有两个，它们互为反数. 为此，我们还规定，在 a 是正数，n 是偶数的时候，记号 $\sqrt[n]{a}$ 只表示两个方根里的正的一个，而负的一个用 $-\sqrt[n]{a}$ 表示. 例如，16 的四次方根有两个，正的一个记为 $\sqrt[4]{16}=2$，负的一个记为 $-\sqrt[4]{16}=-2$.

正数 a 的正的 n 次方根，通常叫做 a 的 n 次算术根.

用记号表示平方根的时候，根指数 2 通常略去不写. 例如 36 的两个平方根通常写成 $\sqrt{36}$ 和 $-\sqrt{36}$.

任何负数的奇次方根都是一个负数，它可以化成一个算术根的反数，例如

$$\sqrt[3]{-27}=-3=-\sqrt[3]{27}.$$

开方和乘方互为逆运算，一个正数开 n 次方后再 n 次乘方，或 n 次乘方后再开 n 次方，都回复到原来的数，即

$$(\sqrt[n]{a})^n=a \quad 和 \quad \sqrt[n]{a^n}=a.$$

为了研究算术根的若干性质，先看下面两个例子：

(1) $\sqrt{4\times9}=\sqrt{36}=6$, $\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot3=6$.

可以看出，$$\sqrt{4\times9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}.$$

(2) $$\sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3},\ \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}.$$

可以看出，$$\sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}.$$

一般地说，当 n 为任意正整数时，

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad(b\neq0).$$

关于求任意次方根的问题，将在学习对数时再介绍.

下面举例说明一个整数开平方的方法：

某生产队要造一个面积为 841 平方米的正方形打谷场，它的边长应是多少？

如果边长是 a，那么 $a=\sqrt{841}$(m). 这就需要把 841 开方. 它的步骤是：

(1) 把 841 从个位起向左每两位用“ ′ ”分段，841 被分为两段 8′41.

(2) 从左边第一段求得平方根的最高位上的数. 这里第一段的数是 8，平方不超过 8 的最大正整数是 2，就写成

$$\begin{array}{l}\quad 2\\ \sqrt{8'41}\end{array}$$

把 $2^2=4$ 写在 8 的下面，从 8 减去 4 得 4，把第二段的数 41 移下，得 441，即

$$\begin{array}{r}2\quad\\ \sqrt{8'4\,1}\\ 4\quad\\ \hline 4\,4\,1\end{array}$$

(3) 把 2 乘以 20，得 40，以 40 去试除 441，所得的商的整数部分写在第二段的数 41 上边，当商的整数部分大于或等于 10 时，就用 9 代替. 这里 441÷40 的整数部分大于 10，我们就把 9 写在 41 上，即

$$\begin{array}{r|l}
 & \ \ 2\ \ 9 \\
 & \sqrt{8'4\,1} \\
 & \ \ 4 \\ \cline{2-2}
40 & 4\,4\,1
\end{array}$$

(4) 把 40 加上 9，得 49，改 40 为 49，再从 441 减 9×49，得 0。这样开方已经完成了，841 的平方根是 29，即

$$\begin{array}{r|l}
 & \ \ 2\ \ 9 \\
 & \sqrt{8'4\,1} \\
 & \ \ 4 \\ \cline{2-2}
49 & 4\,4\,1 \\
 & 4\,4\,1 \\ \cline{2-2}
 & \qquad 0
\end{array}$$

这就是说，打谷场的边长应是 29 米.

【例 6】 求 236.2369 的算术平方根.

解：小数开平方的方法和整数开平方的方法一样，所不同的是分段的时候从小数点起向左、向右每隔两位用“ ' ”分段。

$$\begin{array}{r|r}
 & 1\ \ 5.\ \ 3\ \ 7 \\
 & \sqrt{2'36.23'69} \\
 & 1\qquad\qquad \\ \cline{2-2}
25 & 1\,36\qquad \\
 & 1\,25\qquad \\ \cline{2-2}
303 & 11\ 23\quad \\
 & 9\ 09\quad \\ \cline{2-2}
3067 & 2\ 14\,69 \\
 & 2\ 14\,69 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}$$

即 $$\sqrt{236.2369}=15.37.$$

【例 7】 求 2 的算术平方根.

解：

$$\begin{array}{r|r}
 & 1.\ 4\ 1\ 4 \\
 & \sqrt{2}\qquad\quad \\
 & 1\qquad\quad \\ \cline{2-2}
24 & 1\ 00\ \quad \\
 & 96\ \quad \\ \cline{2-2}
281 & 400 \\
 & 281 \\ \cline{2-2}
2824 & 11900 \\
 & 11296 \\ \cline{2-2}
 & 604
\end{array}$$

如果继续下去，可以发现 $\sqrt{2}=1.414\cdots$ 是一个无限不循环小数，也就是一个无理数.

上面所讲的求平方根的方法比较麻烦，通常可以查阅平方根表，见附录三，在表后有用法说明.

在第一节中，我们讨论了三角形各个角之间的关系，下面我们再来讨论一个直角三角形中三条边之间的关系.

我国劳动人民经过长期的生产实践，很早就曾发现，直角三角形三条边之间有一定的关系. 早在周朝时就有"勾三股四弦五"的说法. 就是说，如果直角三角形的两直角边分别是 3 尺和 4 尺，那么斜边一定是 5 尺. 因为

$$3^2+4^2=3\times3+4\times4=25=5\times5=5^2,$$

对这个直角三角形来说，就有

$$勾^2+股^2=弦^2.$$

事实上，这是一条普遍的规律：直角三角形两直角边平方的和等于斜边的平方. 这个规律也叫做勾股定理. 它在生产实践中有广泛的应用.

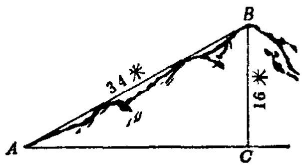


图 1-41

【例 8】 山坡上 A, B 两点间的距离是 34 米，它们的高度差是 16 米(图 1-41)，求 A, B 两点间的水平距离 AC.

解：$\triangle ABC$ 是直角三角形，由勾股定理得 $$AB^2=AC^2+BC^2,$$

根据加减法的关系，从两数之和减去一个加数，就得到另一个加数，即

$$AC^2=AB^2-BC^2=34^2-16^2=1156-256=900,$$

所以 $$AC=\sqrt{900}=30(\mathrm{m}).$$

即 A, B 两点间的水平距离是 30 米.

【例 9】 灌溉站在安装电动机的皮带时，要先算出两轮中心间的距离 AB (图 1-42). 如果两轮中心的水平距离 AC 为 0.8 米，它们离地面的距离分别为 0.4 米和 1.2 米. 求它们的中心距.

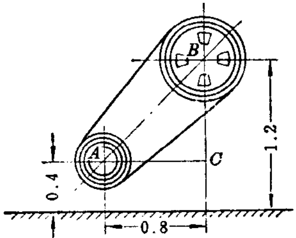


图 1-42

解：在直角三角形 ACB 中，

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

$$\because \quad AC = 0.8,$$

$$BC = 1.2 - 0.4 = 0.8,$$

$$\therefore \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$$

$$= \sqrt{0.8^2 + 0.8^2} = \sqrt{1.28} = 1.13(\mathrm{m}).$$

即两轮的中心距为 1.13 米.

从这些实际问题的计算中可以看到，直角三角形的斜边比任何一条直角边都长.

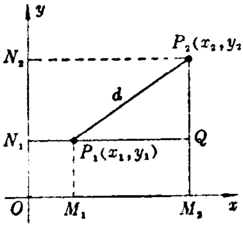


图 1-43

【例 10】 设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$是平面上的两个点，求它们间的距离 d (图 1-43).

解：过 P_1 作 y 轴的垂线 N_1Q，过 P_2 作 x 轴的垂线 P_2M_2，它们相交于 Q. $\triangle P_1QP_2$ 是一个直角三角形(为什么?)，所以有

$$P_1P_2^2 = P_1Q^2 + QP_2^2.$$

从图上我们可看出

$$P_1Q = M_1M_2 = OM_2 - OM_1 = x_2 - x_1,$$

$$QP_2 = N_1N_2 = ON_2 - ON_1 = y_2 - y_1,$$

$$\therefore \quad P_1P_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

即

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

这就是平面上两点之间的距离公式.

【例 11】 如图 1-44，求两点 $A(-7, 3)$和 $B(5, -2)$间的距离.

解：应用上面的公式，这里

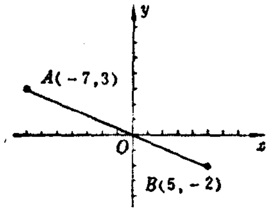


图 1-44

$x_1=-7$，$x_2=5$，$y_1=3$，$y_2=-2$.

$$\begin{aligned}AB&=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\\&=\sqrt{(5+7)^2+(-2-3)^2}\\&=\sqrt{12^2+(-5)^2}\\&=\sqrt{169}\\&=13.\end{aligned}$$

小　　结

1. 幂的概念：

(1) 当 n 为正整数时，$a^n=\overbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}^{n\text{个}}$；

(2) 当 n 为零时，$a^0=1$；

(3) 当 n 为负整数 $-m$ 时，$a^{-m}=\dfrac{1}{a^m}$.

2. 幂的运算法则： 当 $a\neq0$, $b\neq0$ 时，

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n},\quad (a^n)^m=a^{mn},\quad (ab)^n=a^nb^n.$$

3. 方根的概念：

(1) 如果一个数 x 的 n 次方等于 a，那么 x 就叫做 a 的 n 次方根. a 的 n 次算术根就是它的正的 n 次方根.

(2) 算术根的性质

$$(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a,\quad \sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b},\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad (b\neq0).$$

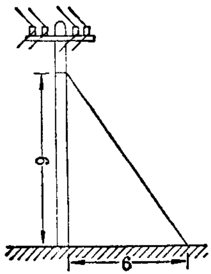
4. 勾股定理：直角三角形两直角边平方的和，等于斜边的平方.

5. 平面上两点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)之间的距离公式：

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

习　题

1. 用开方法或查表法求下列各数的平方根：
   (1) 22500；(2) 3.6×10^7；(3) 0.16；
   (4) 0.0013；(5) 810.
2. 架线工人经常用钢缆加固电线杆，如果钢缆的上端离地面9米，下端离电线杆脚6米，钢缆应长多少？
3. 求下面两点间的距离：
   (1) (2, −2)和(5, 2)；
   (2) $\left(-2\frac{1}{2},1\right)$和$\left(-8\frac{1}{2},-3\right)$.



（第3题）

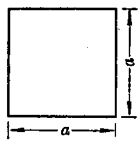
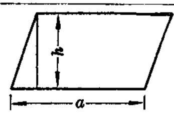
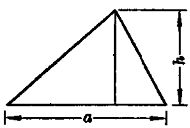
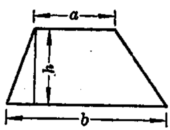
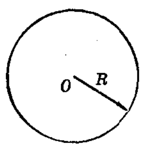
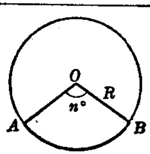
第五节　农业生产中的一些简单计算问题

毛主席教导我们：**“农村是一个广阔的天地，在那里是可以大有作为的。”** 随着农业生产的蓬勃发展，在生产斗争中，经常会遇到一些新问题，需要通过计算来解决．下面我们将介绍关于地积、土方、合理密植、秧苗和种子的用量及估产中的预测和实测方面等的计算问题．

一、地积和土方的计算

在农村水利建设中，经常要把河道截直或加宽加深，这就需要计算河道截面的面积．为了估计人力，又要计算挖泥的土方数．此外，造池积肥，扩仓储粮，都要计算池、仓的容量．因此，必须熟悉面积，体积和容量的计算公式和计算方法．

1．农村中常用的面积计算　几种简单平面图形的面积公式如下：

名　　称	图　　形	面　积　公　式	注
长　方　形		长方形面积＝长×宽 $S=ab$	
正　方　形		正方形面积＝边长×边长 $S=a\cdot a=a^2$	
平行四边形		平行四边形面积＝底边×高 $S=ah$	
三　角　形		三角形面积$=\frac{1}{2}\times$底边×高 $S=\frac{1}{2}ah$	
梯　　形		梯形面积 $=\frac{1}{2}$(上底＋下底)×高 $S=\frac{1}{2}(a+b)h$	一组对边平行，另一组对边不平行的四边形
圆		圆面积$=\pi\times$半径^2 $S=\pi R^2$	
扇　　形		扇形面积＝圆面积的$\frac{n}{360}$ $S=\frac{n}{360}\cdot\pi R^2$	由圆的一段弧和过这段弧端点的两条半径围成的图形

【例 1】 在农村经常要测量土地的面积. 测量土地面积应根据不同的情况采用不同的方法. 图 1-45 是一块不规则的土地(单位: 米), 试求出它的地积.

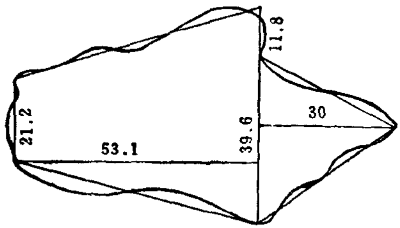


图 1-45

解: 对于一个不规则图形, 我们可以把它适当地划分或割补成几个规则的图形, 这样就可以应用学过的面积公式计算它们的面积.

我们把这块田划分成一个三角形和一个梯形, 并量得它们的底和高, 于是

三角形面积是

$$\frac{1}{2}\times 30\times 39.6=594(\mathrm{m}^2),$$

梯形面积是

$$\frac{1}{2}[21.2+(11.8+39.6)]\times 53.1=1927.53(\mathrm{m}^2),$$

这块田的地积是

$$594+1927.53=2521.53\approx{}^{*}2522(\mathrm{m}^2).$$

地积通常用亩做单位.

$$1\text{ 亩}=60\text{ 平方丈}=6000\text{ 平方尺},$$

$$1\text{ 平方米}=9\text{ 平方尺}=\left(9\times\frac{1}{6000}\right)\text{亩}=0.0015\text{ 亩}.$$

* 符号“≈”是近似等于.

例 1 这块地的地积换算成亩就是

$$2522\times0.0015=3.783(\text{亩}).$$

0.0015 可以记为 1.5×10^{-3}. 乘以 0.0015, 就是在原来的平方米数上, 加上它的一半, 然后乘 10^{-3}, 即把小数点向左移动三位. 所以把平方米换算成亩, 也可用"加半向左移三法".

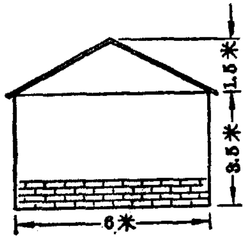


图 1-46

【例 2】 建新大队贫下中农认真执行毛主席关于"备战、备荒、为人民"的指示, 修建仓库储粮. 仓库两边的墙如图 1-46 所示. 如果每平方米的墙需砖 128 块, 砌这两垛边墙需用砖多少块.

解: 这里先要算出边墙的面积, 它是由一个三角形和一个长方形组成的. 它们的面积分别为

$$\frac{1}{2}\times1.5\times6=4.5(\mathrm{m}^2) \text{ 和 } 3.5\times6=21(\mathrm{m}^2).$$

两垛边墙的面积共有

$$2\times(4.5+21)=51(\mathrm{m}^2),$$

一共需用砖

$$128\times51=6528(\text{块}).$$

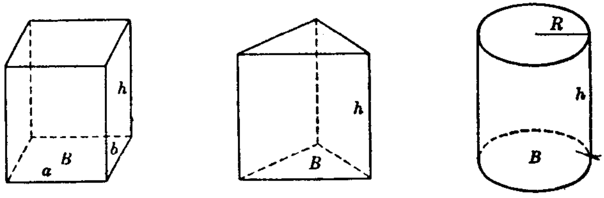
2. 常用的体积公式及其应用 前面我们已经知道, 正方体的体积是长、宽和高的乘积. 由于它们都是相等的, 因此

$$V=a\cdot a\cdot a=a^3.$$

长方体的体积也是长、宽和高的乘积, 即 $V=abh$ [如图 1-47(1)], 如果底面积 $B=ab$, 那么 $V=Bh$.

正方体、长方体都是柱体的一种, 它们的体积公式

$$V=Bh,$$

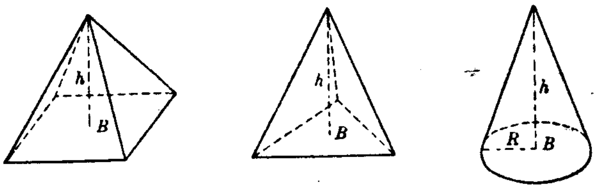


(1) (2) (3)

图 1-47

对于任何柱体都是适用的．例如图 1-47(2) 所示的柱体叫做三棱柱，它的底面是一个三角形．如果底面三角形的面积是 B，那么三棱柱的体积 $V=Bh$．图 1-47(3) 所示的柱体叫做圆柱，它的底面是一个半径为 R 的圆．底面积 $B=\pi R^2$，因而圆柱的体积

$$V=Bh=\pi R^2 h.$$



(1) (2) (3)

图 1-48

如图 1-48 所示的立体都叫做锥体，其中 (1) 叫做四棱锥，(2) 叫做三棱锥，(3) 叫做圆锥．如果它们的底面积和高分别等于图 1-47 里相应柱体的底面积和高的话，那么它们的体积都等于相应柱体体积的三分之一．这只要将图 1-48 所示的锥体，例如圆锥形容器里面装满砂，全部倒入图 1-47(3) 所示的圆柱形容器中，我们可以看到，倒了三次，刚好把圆柱形

容器装满，所以

棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}Bh$,

圆锥的体积 $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$.

最后，球的体积是

$$V=\frac{4}{3}\pi R^3,$$

这里 R 是球的半径.

下面我们介绍体积计算在农业生产中的应用.

【例 3】 广大贫下中农遵照毛主席关于"**普遍建设谷仓，建设备荒仓**"的教导，利用稻草、粘土等材料，建成土圆仓，为粮仓建设作出了贡献. 土圆仓是圆柱形粮仓. 有一个土圆仓，它的内径为 2.5 米，储粮部分高 3.5 米(图 1-49). 这个仓可储稻谷多少斤？(每立方米稻谷重按 1150 斤计算.)

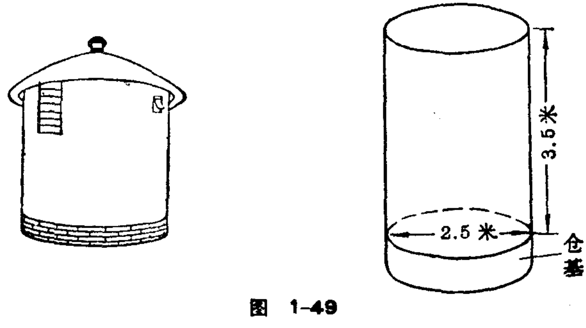


图 1-49

解：由圆柱体的体积公式可知，这个仓的容积是 πR^2h.

$\because \quad R=\frac{2.5}{2}=1.25(\mathrm{m}),\ h=3.5(\mathrm{m})$,

$\therefore$* 容积 $=3.14\times(1.25)^2\times3.5\approx17.17(\mathrm{m}^3)$.

---

* "$\because$"代表"因为"，"$\therefore$"代表"所以".

可装稻谷　　　　$1150\times17.17\approx19800$(斤).

【例 4】 打谷场上的谷堆往往堆成近似圆锥形. 现量得谷堆的底面圆周长是 6.28 米, 高是 1.5 米, 求这堆谷子重多少. $\left(\text{圆周长}\ C\ \text{与半径}\ R\ \text{的关系是}\ R=\frac{C}{2\pi}.\right)$

解: 利用圆锥体的体积公式可求得谷堆体积.

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2h=\frac{1}{3}\times3.14\times\left(\frac{6.28}{2\times3.14}\right)^2\times1.5$$
$$=1.57(\mathrm{m}^3).$$

因为一立方米的谷子重 1150 斤,所以谷堆重

$$1150\times1.57\approx1800(\text{斤}).$$

农村中灌溉渠道的横断面一般是梯形, 这个横断面是垂直于水流方向的. 每秒钟流过这个断面的水量的立方米数叫做流量. 如果水流的速度以每秒多少米来计算的话,很明显,流量等于横断面面积和流速的乘积.

【例 5】 如图 1-50, 已知渠道横断面底宽是 0.8 米, 水高是 0.4 米, 水面宽是 1.6 米,水的流速是 0.5 米/秒,求流过这个渠道断面的流量.

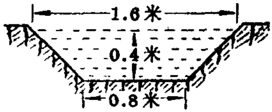


图 1-50

解: 渠道横断面的面积 $S=\frac{1}{2}(0.8+1.6)\times0.4$

$$=0.48(\mathrm{m}^2),$$

所以流过渠道断面的流量是

$$0.48\times0.5=0.24(\text{立方米/秒}).$$

反过来,如果渠道进水的流量和流速都已确定,那么渠道的横断面积必然有确定的值. 所以在设计渠道的过程中,流量和流速是两个重要的依据.

【例 6】 挖一条长 1 公里的渠道，它的横断面是梯形，下底是 0.8 米，上底是 2.7 米，高为 0.95 米，求挖土的土方数（一方就是一立方米）.

解：渠道横断面面积是

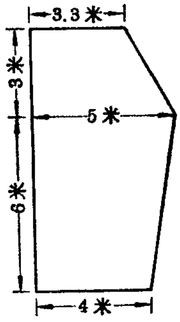
$$\frac{1}{2}(0.8+2.7)\times 0.95\approx 1.66(\mathrm{m}^2).$$

由棱柱的体积公式，可知挖去的土方数是

$$1.66\times 1000=1660(\text{方}).$$

练习

1. 一块地如图所示，计算它的地积.



（第 1 题）

2. 生产队造池积肥，造一只圆池形的蓄粪池，深为 1.5 米，底面直径为 3.6 米，求它的容积. 如果每立方米粪重 1.1 吨，这个池可装粪多少吨?

[1. 39.45 平方米. 2. 15.3 立方米，约 17 吨.]

二、有关合理密植的计算

合理密植是提高农作物产量的重要措施之一. 下面介绍一些有关合理密植方面的计算.

农作物每行间的距离叫行距，图 1-51 中的行距为 4 寸.在一行里，每相邻两个播种穴之间的距离叫穴距，又称株距，图中的穴距是 3 寸.

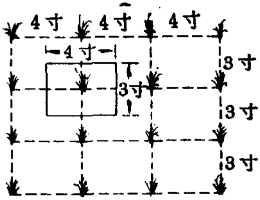


图 1-51

图中用实线画出的长方形，表示这块田里每一穴作物所占的地积，也就是一穴作物的营养面积.从图中可以看出，这个长方形的长也是 4 寸，宽也是 3 寸，它的面积是 12 平方寸. 这样，我们就得到了计算作物营养面积的公式：

$$作物的营养面积=行距\times株距.$$

很明显，一块田的穴数等于它所含有的营养面积的个数.

根据 1 亩 = 600000 平方寸，可得

$$每亩田种植作物的穴数=\frac{600000(平方寸)}{行距(寸)\times株距(寸)}.$$

【例 7】 “农业的根本出路在于机械化”. 上海 -1 型机动水稻插秧机插秧的平均行距为 3.8 寸；株距有 3 寸、4 寸两种规格，如以株距 3 寸插秧，求插一亩田的穴数.

解：$一亩田的穴数=\dfrac{600000}{3\times3.8}\approx52631.$

即插一亩田约有 52600 穴.

【例 8】 已知岱字棉的营养面积是 120 平方寸. 在一块长为 16 丈，宽为 12 丈的棉田里，一共可种多少穴棉花？

解：16 丈 = 1600 寸， 12 丈 = 1200 寸；

所以 棉田的面积 = 1600 × 1200 = 1920000(平方寸).

这块田共可种棉花

$$1920000\div120=16000(穴).$$

即这块棉田共可种岱字棉16000穴.

在上面所讲的例子中，农作物每两行间的距离都是相等的. 但有时为了间种和通风透光等的需要，作物播种的行距在一块田里往往不一样，而是宽窄相间的. 在这种情形下，也容易计算每穴的营养面积. 如图1-52，一块棉田按宽窄行播种，行距宽的是2.4尺，窄的是1.2尺；株距是0.8尺. 可以看出，每穴棉花所占有的营养面积是一块长方形，这些长方形的面积都相同. 它们的长是$(2.4+1.2)\div2=1.8$尺，就是平均行距；它们的宽等于株距0.8尺. 每穴的营养面积是

$$1.8\times0.8=1.44\text{ 平方尺}.$$

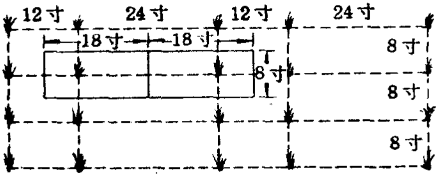


图 1-52

这就是说，要计算按照宽、窄行播种的作物的营养面积(也就是穴数)，只要求出它的平均行距再乘以株距就可以了.

三、秧苗数和种子重量的计算

我们已经学会了计算大田里所种作物的穴数，这样就不难准确地估计应该准备的秧苗数或种子的重量.

【例9】 某农场一亩棉花试验田，采用宽窄行播种，平均行距是1.55尺，穴距是5寸. 按每穴种一株计算，这亩田可种多少株棉花？又如果用营养钵育苗，秧苗的利用率是百分之八十八，需准备营养钵多少只？

解：每株棉花的营养面积 $=(1.55\times 0.5)$ 平方尺．

$$一亩田可种的株数=\frac{6000}{1.55\times 0.5}\approx 7742.$$

$$需要准备的营养钵数=7742\div\frac{88}{100}\approx 8798.$$

即这亩田可种棉花 7742 株，共需准备营养钵 8798 只．

【例 10】 种黄豆 10 亩，规定行距是 8 寸，株距是 6 寸．如果每穴黄豆 5 粒，每千粒黄豆重 120 克，那么一共需要黄豆多少斤？

解：一亩田共有穴数　$\frac{600000}{8\times 6}=12500$(穴)，

一亩田需黄豆种子　$12500\times 5=62500$(粒)．

它们共重　$62500\times\frac{120}{1000}=7500$(克)，

折合成市制　$7500\div 500=15$(斤)，

所以共需黄豆种子　$15\times 10=150$(斤)．

【例 11】 某生产队种植早稻广陆矮四号，要求每亩基本苗 300000 株，如果每穴苗 6 株，怎样合理确定行距和株距？

解：这 300000 株苗，需要 $300000\div 6=50000$ 穴．每穴的营养面积是

$$600000\div 50000=12(平方寸).$$

由于 $12=4\times 3$，所以一般可取行距 4 寸，株距 3 寸．

四、估　　产

毛主席教导我们：“**对情况和问题一定要注意到它们的数量方面，要有基本的数量的分析。**”在收割农作物之前，预先估计作物的产量，有助于安排劳动力、场地和仓库等工作的进行，对国家制订收购、调运等计划也有参考价值．估产分预

测和实测两种．现在分别介绍如下：

1．预测　一般在农作物即将成熟时进行，通常采用抽样估计法．我们以水稻为例说明如下：

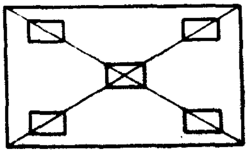


图 1-53

(1) 取样：选出有代表性的田块作为测产对象．在所选的田的对角线上取三个样点，或者在两条对角线上取五个样点，就是所谓三点取样法和五点取样法(图 1-53)．

(2) 计算平均每亩的穴数：在每个样点上，测量 21 个穴之间的横直距离，分别除以 20，得这个点的行距和株距．如果采用五点取样法，那么把五个样点所得的行距和株距分别相加，并除以 5，得到五个样点的平均行距和株距，即作为大田的行距和株距．再根据前面的公式，求出每亩的穴数．

(3) 计算平均每穴的有效穗数：在 5 个样点里各取 5 个穴，求出每个样点里每穴的平均有效穗数；再把它们相加，并除以 5，得到 5 个样点的平均有效穗数．

(4) 计算平均每穗的实粒数：在每一个样点里取一穴，数出这一穴里全部有效穗上的粒数，除以有效穗数，得到一个样点的每穗平均粒数；再求出五个样点的每穗平均粒数．

(5) 计算亩产量：根据上面所得到的数据，可以算出每亩水稻的总粒数，即

一亩的总粒数

$$=\frac{600000}{\text{行距}\times\text{株距}}\times\text{每穴有效穗数}\times\text{每穗的实粒数}.$$

这样，就可计算预测亩产量．

$$亩产量(斤)=一亩的总粒数\times千粒重\times\frac{1}{1000\times500}^{*};$$

或 $$亩产量(斤)=一亩的总粒数\div每斤粒数,$$

这里, $$每斤粒数=\frac{1000}{千粒重(克)}\times500.$$

实际收获量往往稍低于预测数,一般可打一个九折.

如果要求预测的产量更接近于实际,可以按照庄稼生长的情况,把大田分成几片,在每片里各取一块有代表性的田,用上述方法分别求出各片里的亩产量,再求出它们的平均亩产量.

测定作物种子千粒重的方法是,先拣去杂质、碎粒等,然后数出一千粒一堆.一般取三堆或五堆.再分别称出各堆种子的重量,算出各堆的平均重量,就得到千粒重.

下表是主要作物种子的千粒重和每斤的粒数:

作物名称	千粒重(克)	每斤种子粒数
水稻	25～33	15000～20000
小麦	26～32	15600～19000
玉米	350	1500
棉花(籽)	90～120	4100～5500
油菜	2～5	100000～250000
黄豆	110～130	3800～4500
花生	1250～1430	350～400

【例 12】 某生产队测得后季稻双丰一号的行距和株距分别是 5 寸与 4 寸,平均每穴有 9 个有效穗,每穗有 72 粒实粒.已知这种后季稻的千粒重是 28 克,估计这块田的亩产量是多少斤?

* 千粒重是 1000 粒的重量(一般以克为单位),因此要除以 1000;一市斤等于 500 克,所以再除以 500.

解：后季稻的亩产量

$$=\frac{600000}{5\times4}\times9\times72\times\frac{28}{1000}\times\frac{1}{500}=1089(斤).$$

所以实际亩产量约是$1089\times\frac{9}{10}\approx980$(斤).

种植三麦，一般采用条播或撒播，没有一定的株行距．取样时，要测出每一平方尺里的平均穗数，然后再计算每穗平均实粒数，从而计算亩产量．

【例 13】 小麦武麦一号的丰产田，畦宽是 6.8 尺．在这块田里取每段长为 3 尺的三段，测得穗数分别是 655，700，715．求这块田的每亩有效穗数．

解：样段的总面积$=6.8\times3\times3=61.2$(平方尺).

三段的总穗数$=655+700+715=2070$(穗).

$\therefore$ 每亩有效穗数$=\frac{2070}{61.2}\times6000=202938$(穗).

棉花的估产方法是选取样点后，数出每株的棉铃个数，按如下公式计算：

$$平均亩产量(斤)=\frac{600000}{株距(寸)\times行距(寸)}\times平均每株有效铃数\times百铃重\times\frac{1}{100}\times\frac{1}{500},$$

这里百铃重是指 100 只棉铃的重量，一般是 490～500 克；或

$$平均亩产量(斤)=\frac{600000}{株距(寸)\times行距(寸)}\times每株平均铃数\div每斤籽棉的铃数.$$

2．实测 一般是在作物已经成熟，大面积收割之前进行的．按照各类的田，分别取有代表性的田若干块作为取样区域．把取样区域的作物全部割下，晒干，脱粒，扬净，称重．全

部取样的产量的和(以斤为单位)除以全部取样区的面积(以平方尺为单位),得到每平方尺的产量. 再乘以6000,就得到每亩的产量(斤).

【例14】 在大麦早熟三号田里取三个样区,每样区的面积是60平方尺,将样区里的大麦脱粒净得15斤. 求亩产量.

解: 样区总面积$=60\times3=180$(平方尺),

$$\text{每平方尺的产量}=\frac{15}{180}=\frac{1}{12}(\text{斤}),$$

$$\therefore\quad \text{平均亩产量}=\frac{1}{12}\times6000=500(\text{斤}).$$

小　结

1. 简单平面图形的面积公式,见第50页附表.
2. 体积公式:

$$\text{圆柱体 } V=\pi R^2h;\ \text{圆锥体 } V=\frac{1}{3}\pi R^2h;$$

$$\text{棱锥体 } V=\frac{1}{3}Bh;\ \text{球体 } V=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

3. $\text{作物每亩穴数}=\dfrac{600000}{\text{行距(寸)}\times\text{株距(寸)}}.$
4. 水稻预测亩产量(斤)=每亩穴数×每穴平均穗数×每穗平均粒数÷每斤粒数.
5. 三麦预测亩产量(斤)=每平方尺的平均穗数×6000×每穗平均粒数÷每斤粒数.
6. 棉花亩产量(斤)=每亩种植株数×每株平均棉铃数÷每斤籽棉的铃数.
7. 预测农作物亩产量,可利用下列各统计表,把相应的结果代入上面公式进行计算.

水稻测产统计表

小田名		品种		千粒重(克)		每斤粒数	

样点 / 数据 / 项目	1	2	3	4	5	平均
株距						
行距						
每穴穗数						
每穗粒数						

亩产量 斤	面积 亩	总产量 斤

日期 19 年 月 日

三麦测产统计表

小田名		品种		千粒重(克)		每斤粒数	

样点 / 数据 / 项目	1	2	3	4	5	平均
每平方尺穗数						
每穗粒数						

亩产量 斤	面积 亩	总产量 斤

日期 19 年 月 日

棉花测产统计表

小田名		品种		百铃重(克)		每斤铃数	

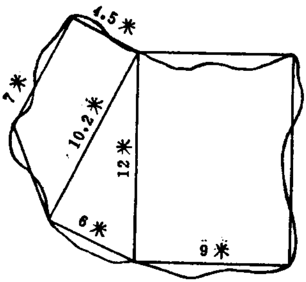
样点 / 数据 / 项目	1	2	3	4	5	平均
株距（尺）						
行距（尺）						
每株铃数						

亩产量 斤	面积 亩	总产量 斤

日期 19 年 月 日

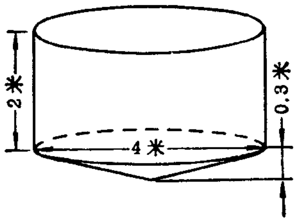
习 题

1. 下图是某生产队的一块试验田，可分割成梯形、三角形和长方形各一个，试求它的地积.



(第1题)

2. 一个圆柱形蓄粪池，底部近似于圆锥形. 已知圆柱部分的高是2米，圆锥部分的高是0.3米，圆柱底面的直径是4米. 这个池的容积是多少？可装粪多少吨？



(第2题)

3. 渠道的横断面是一个梯形，水面宽1.2米，渠底宽0.7米，水深0.4米. 如果水流的速度是每秒0.5米，这个渠道一秒钟，一分钟，一小时各流过多少立方米的水？

4. 一个圆锥形的煤堆，底面周长38米，高6米. 如果每立方米的煤重1.4吨，一车可运煤5吨，需要几车才能将这堆煤运完？

5. 一块地长20丈，宽12丈，现在种番茄，要求行距2尺，株距8寸，

这块地总共可种多少株番茄(一穴种一株)?

6. 填充下面的统计表:

样　区	面积(亩)	株　距	行　距	每亩株数	每株铃数	亩产量(斤)
第一区	3.6	7 寸	15.5 寸		12	
第二区	12.5	7.5 寸	16.5 寸		13	
第三区	5.4	6 寸	13 寸		10	
棉花百铃重=490 克				平均亩产量　　斤		

7. 某生产队种双季晚稻试验田一块,指标是亩产 1000 斤. 如果估计平均每穴有效穗是 9 个,每穗结实粒 70 粒,千粒重是 27 克,试确定行距与株距.

第二章　式

在前一章里，我们看到实际问题中的数量关系，往往是用含有数字和字母的算式表示的．例如三角形的面积用算式 $\frac{1}{2}ah$ 来表示．这样用运算符号把数字和代表数的字母连结起来的式子，叫做代数式．数是式的特殊形式．在这一章里，我们要学习代数式的运算．

第一节　整　　式

一、整式的加法和减法

我们先从形式最简单的代数式——单项式开始讲起．不含有加减运算，而且除数没有字母的代数式叫做单项式．例如三角形的面积公式 $\frac{1}{2}ah$ 和圆锥体的体积公式 $\frac{1}{3}\pi R^2h$ 都是单项式．

为了讨论方便起见，先说明什么叫单项式的系数和次数．

单项式里字母前的数字，叫做单项式的系数．例如

$$\frac{1}{2}ah \text{ 的系数是 } \frac{1}{2}；\ \frac{1}{3}\pi R^2h \text{ 的系数是 } \frac{1}{3}\pi.$$

这里 π 表示圆周率，是一个无理数．单项式的系数也可为 1，如 x^2y．

单项式里所有字母的指数的和，叫做这个单项式的次数．例如

在 $\frac{1}{2}ah$ 里，a 的指数与 h 的指数的和是 $1+1=2$，因此它是二次单项式；

在$\frac{1}{3}\pi R^2h$里，R 与 h 的指数和是 3，因此它是三次单项式．

字母部分完全相同（即字母和每个字母的指数都相同）的单项式叫做同类项．例如

$\frac{1}{2}ab$ 与 $3ab$ 的字母部分都是 ab．它们是同类项；

$3x^2y$ 与 $-5x^2y$ 的字母部分都是 x^2y，它们也是同类项．但是象 $3x^2y$ 与 $3xy^2$，它们的字母部分不完全相同，因此它们不是同类项．

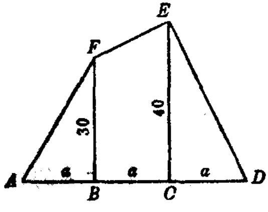
练习

说出下列单项式的系数和次数．哪些项是同类项？

$$10x^2,\quad -3x,\quad \frac{1}{3}x^2y,\quad 0.2x^2,\quad -\frac{1}{2}x^2y,\quad \sqrt{2}x.$$

下面将举几个实际例子，说明怎样利用单项式来进行计算．

【例 1】 图 2-1 的四边形 $ADEF$ 是由两个直角三角形



（单位：米）

图 2-1

ABF, CDE 和一个梯形 $BCEF$ 所组成的. 求它的面积.

解: 三角形ABF的面积$=\frac{1}{2}\times 30\times a=15a(\text{m}^2)$,

三角形CDE的面积$=\frac{1}{2}\times 40\times a=20a(\text{m}^2)$,

梯形 $BCEF$ 的面积$=\frac{1}{2}\times(30+40)\times a=35a(\text{m}^2)$.

四边形 $ADEF$ 的面积等于这三个面积的和, 就是上面三个单项式的和, 即

$$15a+20a+35a.$$

这里, 三个单项式是同类项. 根据乘法对加法的分配律, 我们可以把它们合并成一个单项式(叫做合并同类项), 得

$$15a+20a+35a=(15+20+35)a=70a(\text{m}^2).$$

即四边形 $ADEF$ 的面积是 $70a$ 平方米.

【例 2】 要造一个圆柱形的氨水池(如图 2-2), 外圆半径为 R, 内圆半径为 $\frac{9}{10}R$, 高为 h, 试计算这个圆柱壁的体积.

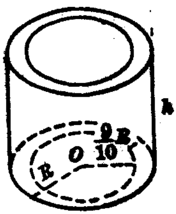


图 2-2

解: 外圆柱的体积是 πR^2h,

内圆柱的体积是 $\pi\left(\frac{9}{10}R\right)^2h$, 即

$$\frac{81}{100}\pi R^2h.$$

圆柱壁的体积是外圆柱体积减去内圆柱体积所得的差:

$$\pi R^2h-\frac{81}{100}\pi R^2h.$$

这里, 两个单项式是同类项, 把它们合并成一项, 得

$$\pi R^2h-\frac{81}{100}\pi R^2h=\left(1-\frac{81}{100}\right)\pi R^2h=\frac{19}{100}\pi R^2h.$$

即圆柱壁的体积是 $\frac{19}{100}\pi R^2h$.

在以上两个例子中，$15a+20a+35a$ 和 $\pi R^2h-\frac{81}{100}\pi R^2h$ 都是单项式的代数和. 我们把单项式的代数和叫做多项式. 上面两个多项式经过合并同类项后，分别化成单项式 $70a$ 和 $\frac{19}{100}\pi R^2h$. 这样，计算它们的值就比较简便了.

在图 2-1 中，如果 AB, BC 和 CD 不相等，例如顺次是 a, b 和 c，那么四边形的面积 $=15a+20b+35c$，这里没有同类项可合并.

由此可见，并不是每一个多项式都可以化成单项式的. 因此，我们有必要进一步来研究多项式的运算法则.

现在来看多项式

$$x^2+3x-2.$$

它是三个单项式 x^2, $3x$ 和 -2 的代数和. 多项式里每一个单项式叫做这个多项式的一个项. 不含字母的项叫做常数项，常数项的次数规定为 0. x^2+3x-2 有三个项：一个二次项 x^2，一个一次项 $3x$，一个常数项(或者零次项) -2.

多项式里次数最高的项的次数叫做这个多项式的次数. 多项式 x^2+3x-2 的次数是 2. 因为 x^2+3x-2 的项数是 3，所以它是一个二次三项式.

练习

说出下列各多项式的次数，它们分别是哪些单项式的代数和?

$$2x-1,\quad 7x^2+2x^3-1,\quad a^3-0.3a^2+1.5a,\quad \frac{1}{2}a^3-\frac{3}{4}a.$$

【例 3】 要做一个长方体的铁皮箱，尺寸如图 2-3 所示，计算所用铁皮的面积.

解：把铁皮箱的表面展开，共得六个长方形．铁皮的面积就是六个长方形的面积的和，即

$$铁皮的面积 = ab + ab + bc + bc + ac + ac = 2ab + 2bc + 2ac.$$

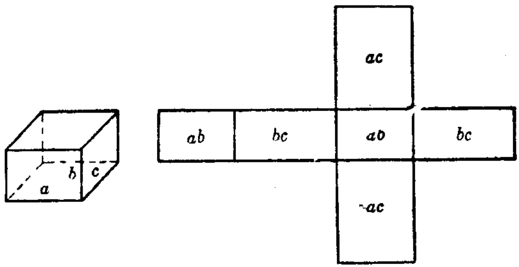


图 2-3

【例 4】 做一个底面半径为 R，高为 h 的圆柱形铁筒，如图 2-4(1)，需用多少铁皮？

解：所求的铁皮面积等于侧面积与二个底面积的和．设

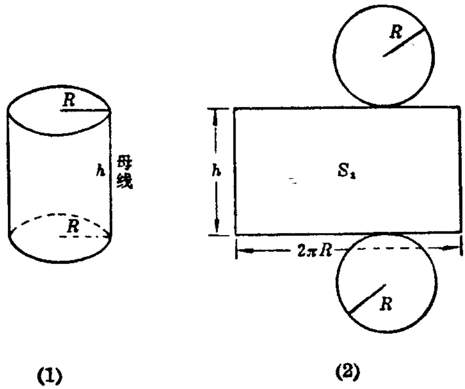


图 2-4

想沿圆柱侧面的一条母线把侧面剪开摊平，得到一个如图2-4(2)所示的长方形．这个长方形的长等于底面圆周的长$2\pi R$，宽等于圆柱的高h．因此铁筒的侧面积是

$$S_1=2\pi Rh,$$

两底面积的和 $$S_2=2\pi R^2.$$

所以圆柱的表面积$S=S_1+S_2=2\pi Rh+2\pi R^2$.

【例5】 计算：

(1) $(6x^2+x+3y)+(2x^2-3x+2y)$；

(2) $(6x^2+x+3y)-(2x^2-3x+2y)$.

解：(1) $(6x^2+x+3y)+(2x^2-3x+2y)$

$=6x^2+x+3y+2x^2-3x+2y$

$=8x^2-2x+5y$.

(2) $(6x^2+x+3y)-(2x^2-3x+2y)$

$=6x^2+x+3y-2x^2+3x-2y$

$=4x^2+4x+y$.

从这个例题可以看到，多项式相加减，应先去括号，然后再合并同类项．

单项式与多项式统称为整式，从前面的例子可以看出，整式相加减的结果还是整式．

练习

计算：

(1) $0.2x+(1.2x-0.2)$；

(2) $3a-(a+2b)$；

(3) $(2x^2+3x+5)+(3x^2+6x-1)$；

(4) $(2x^3-3x^2+6)-(10-5x^2-3x^3+6x)$；

(5) $3x-[5x-(2x+1)]$.

[(1) $1.4x-0.2$；(2) $2a-2b$；(3) $5x^2+9x+4$；(4) $5x^3+2x^2-6x-4$；(5) 1.]

二、整式的乘法

我们来看图 2-5 的长方体. 它的体积是

$$V=\frac{1}{2}a\times\frac{3}{2}a\times a.$$

这是三个单项式相乘. 利用乘法交换律、结合律和幂的运算法则,可得

$$V=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times a\times a\times a=\frac{3}{4}a^3.$$

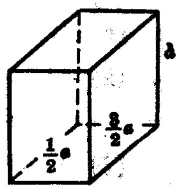


图 2-5

由此可知,单项式相乘的法则是:数字系数与数字系数相乘,得到乘积的数字系数;每个字母的指数,取各个单项式里这个字母指数的和. 所得的结果还是一个单项式.

【例 6】 计算:

(1) $(3x^2y)(-3x^2y)$; (2) $\left(\frac{3}{4}x^2\right)\left(\frac{4}{3}y^2\right)$;

(3) $(2b)^2\cdot a^2b$.

解: (1) $(3x^2y)(-3x^2y)=3\times(-3)\cdot x^2\cdot x^2\cdot y\cdot y=-9x^4y^2$.

(2) $\left(\frac{3}{4}x^2\right)\left(\frac{4}{3}y^2\right)=\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\cdot x^2\cdot y^2=x^2y^2$.

(3) $(2b)^2\cdot a^2b=4b^2\cdot a^2b=4\cdot a^2\cdot b^2\cdot b=4a^2b^3$.

由乘法对加法的分配律:

$$a(b+c)=ab+ac,$$

可得单项式和多项式相乘的法则是:将单项式与多项式的各项分别相乘,再把所得的积相加.

【例 7】 计算:

(1) $(a+b+c)a$; (2) $(-x)(x^2+3x-1)$.

解: (1) $(a+b+c)a=a^2+ab+ac$.

(2) $(-x)(x^2+3x-1)=-x^3-3x^2+x$.

有了单项式与单项式，单项式与多项式相乘的法则，我们就不难得出多项式与多项式相乘的法则.

多项式与多项式相乘，先将一个多项式的每一项分别与另一个多项式的每一项相乘，再把所得的积相加.

【例 8】 计算：

(1) $(a+b)(a+b)$； (2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

解：(1) $(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$.

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$$=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

【例 9】 计算：$(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$.

解：$(x+\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

$$=x^2+\sqrt{2}x+\sqrt{2}x+(\sqrt{2})^2=x^2+2\sqrt{2}x+2.$$

【例 10】 计算：$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$.

解：$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$

$$=x^5-x^4+x^3-x^2+x+x^4-x^3+x^2-x+1=x^5+1.$$

在以上整式的乘法里，几个整式相乘的积仍然是整式，原来的几个整式就叫做这个积的因式，而这个积也叫做这些因式的倍式. 例如在例 10 中，x^5+1 是 $x+1$ 和 $x^4-x^3+x^2-x+1$ 的积，我们就说，$x+1$，$x^4-x^3+x^2-x+1$ 都是 x^5+1 的因式；x^5+1 是 $x+1$ 或 $x^4-x^3+x^2-x+1$ 的倍式.

当多项式的项数较多时，最好先把它依某一字母的指数按从大到小的次序排列，再行计算.

【例 11】 计算：$(x^4-2x^2+x^3-x+2)(3+3x^3)$.

解：$(x^4-2x^2+x^3-x+2)(3+3x^3)$

$$=(x^4+x^3-2x^2-x+2)(3x^3+3)$$

$$=3x^7+3x^6-6x^5-3x^4+6x^3+3x^4+3x^3-6x^2-3x+6$$
$$=3x^7+3x^6-6x^5+9x^3-6x^2-3x+6.$$

练习

计算.

(1) $(2x+y)(2x-y)$; (2) $(1+3y)^2$;

(3) $(4x+3y)^2$; (4) $(1-x)^3$;

(5) $(a+1)(a^2-a+1)$.

[(1) $4x^2-y^2$; (2) $1+6y+9y^2$; (3) $16x^2+24xy+9y^2$;

(4) $1-3x+3x^2-x^3$; (5) a^3+1.]

三、乘法公式

为了计算迅速起见，我们把某些特殊的多项式乘法写成公式. 常用的公式有:

(1) $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

(2) $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$;

(3) $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$;

(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$;

(6) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

(7) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

读者不难用多项式相乘的法则验证这些公式. 例如

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3$$
$$=a^3-b^3.$$

【例 12】 计算:

(1) $(-a-2)^2$;

(2) $(1+x^2)^2$;

(3) $(a+b+c)^2$.

解：(1) $(-a-2)^2=[-(a+2)]^2=(-1)^2(a+2)^2$

$$=(a+2)^2=a^2+2\times 2a+2^2$$
$$=a^2+4a+4.$$

(2) $(1+x^2)^2=1+2\cdot x^2+(x^2)^2=1+2x^2+x^4.$

(3) 为了计算$(a+b+c)^2$，先把$a+b$看成一项，于是

原式$=[(a+b)+c]^2=(a+b)^2+2(a+b)c+c^2$

$$=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc.$$

【例 13】 计算：$(-2a+3b)^2$.

解：先对调前后两项，然后应用公式(2).

$$(-2a+3b)^2=(3b-2a)^2=(3b)^2-2(3b)(2a)+(2a)^2$$
$$=9b^2-12ab+4a^2.$$

【例 14】 计算：

(1) $(2m+n)(2m-n)$;

(2) $(a+1)(a-1)(a^2+1)$;

(3) 697×703.

解：(1) 应用公式(3).

$$(2m+n)(2m-n)=(2m)^2-n^2=4m^2-n^2.$$

(2) 两次应用公式(3).

$$(a+1)(a-1)(a^2+1)=(a^2-1)(a^2+1)=a^4-1.$$

(3) 经过适当变换后，应用公式(3).

$$697\times 703=(700-3)(700+3)=700^2-3^2$$
$$=490000-9=489991.$$

练习

计算：

(1) $(x^4+a^5)(x^4-a^5)$; (2) 21.2×20.8;

(3) $(3a+2b)(9a^2+4b^2)(3a-2b)$;

(4) $4x^2+2(1+x)(1-x)$.

[(1) x^8-a^{10}; (2) 440.96; (3) $81a^4-16b^4$; (4) $2x^2+2$.]

【例 15】 计算:

(1) $(x+3)^3$; (2) $2(a+b)^3-3(a-b)^3$.

解: (1) $(x+3)^3=x^3+3x^2\cdot3+3x\cdot3^2+3^3$

$$=x^3+9x^2+27x+27;$$

(2) $2(a+b)^3-3(a-b)^3$

$$=2(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-3(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$

$$=2a^3+6a^2b+6ab^2+2b^3-3a^3+9a^2b-9ab^2+3b^3$$

$$=-a^3+15a^2b-3ab^2+5b^3.$$

【例 16】 计算:

(1) $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)$;

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

解: (1) $\left(a-\frac{1}{2}\right)\left(a^2+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}\right)$

$$=\left(a-\frac{1}{2}\right)\left[a^2+\frac{1}{2}a+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]=a^3-\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$=a^3-\frac{1}{8}.$$

(2) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6.$$

练习

计算:

(1) $(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$; (2) $[(x^2-2)(x^4+2x^2+4)]^2$;

(3) $a^3+b^3-(a+b)(a^2-ab+b^2)$;

(4) $(a+b)^3-(a-b)^3$.

[(1) $8a^3-b^3$; (2) $x^{12}-16x^6+64$; (3) 0; (4) $6a^2b+2b^3$.]

四、因 式 分 解

前面我们主要讨论了怎样把几个整式的相乘积化为一个整式，即把积的形式化为和的形式. 但有时我们也需要把一个多项式分解成几个整式相乘的形式，即把和的形式化为积的形式. 例如建造一个如图 2-6 的氨水池，为了估计所需材料，要计算它的表面积. 如果底面半径是 R，深是 h，那么它的表面积是

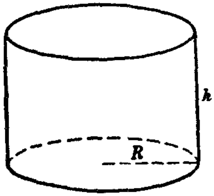


图 2-6

$$S=2\pi R^2+2\pi Rh.$$

假定 $R=1.2\text{m}$, $h=1.6\text{m}$，就得到

$$S=2\pi\times1.2^2+2\pi\times1.2\times1.6$$
$$=6.28\times1.44+6.28\times1.2\times1.6=21.1(\text{m}^2).$$

如果我们反过来应用分配律，把表面积公式化成

$$S=2\pi R(R+h),$$

然后代入已知数据，得

$$S=2\pi\times1.2(1.2+1.6)=2\pi\times1.2\times2.8=21.1(\text{m}^2).$$

这样计算就比较简单了.

把一个多项式化成几个因式的积的形式，叫做多项式的因式分解.

下面我们来讨论几种常用的因式分解的方法.

1. **提取公因式法** 从上面所讲的可以看到，如果一个多项式的各项都含有同一个因式，就可以把它提到括号外面. 这个因式叫做多项式各项的公因式，这种分解因式的方法叫做提取公因式法.

【例 17】 把下列各式分解因式：

(1) a^2+a;　　　　(2) $9a^3-6a^2b$;

(3) $-3a^4b^2-6a^3b^3+12a^2b^4$.

解：(1) $a^2+a=a(a+1)$.

(2) $9a^3-6a^2b=3a^2(3a-2b)$.

(3) $-3a^4b^2-6a^3b^3+12a^2b^4$

$=-3a^2b^2(a^2+2ab-4b^2)$.

【例 18】 把下列各式分解因式：

(1) $a(b-2)+2(b-2)$;

(2) $3(x-1)-x(1-x)$.

解：(1) 提取公因式 $b-2$，得

$$a(b-2)+2(b-2)=(b-2)(a+2).$$

(2) 因 $1-x=-x+1=-(x-1)$，所以

$$3(x-1)-x(1-x)=3(x-1)+x(x-1)$$
$$=(x-1)(3+x).$$

【例 19】 计算：$20.6\times\frac{3}{4}-8.6\times\frac{3}{4}$.

解：$20.6\times\frac{3}{4}-8.6\times\frac{3}{4}=(20.6-8.6)\times\frac{3}{4}$

$=12\times\frac{3}{4}=9$.

练习

把下列各式分解因式：

(1) $2cd+d$; (2) $x(y+3)-2(y+3)$;

(3) $a^2b(b+c)-ab^2(c+b)$; (4) $2x(x-y)^2-y(y-x)^2$.

[(1) $d(2c+1)$; (2) $(y+3)(x-2)$; (3) $ab(a-b)(b+c)$;
(4) $(x-y)^2(2x-y)$.]

2. 分组分解法 多项式

$$ax+ay+bx+by$$

的四项并没有公因式，是否可以分解呢？毛主席教导我们："必

须提倡思索，学会分析事物的方法，养成分析的习惯。"对于四项全体来说，没有公因式，但这并不排斥局部有公因式．这里，前面两项就有公因式 a，后面两项就有公因式 b．因此原式可以分成两组：

$$ax+ay=a(x+y) \quad 和 \quad bx+by=b(x+y).$$

而这两组中又有公因式 $x+y$，于是

$$ax+ay+bx+by=a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b).$$

这种把多项式的项适当分组后，再进行分解的方法，叫做分组分解法．

【例 20】 把下列各式分解因式：

(1) $a^2+ab-4a-4b$； (2) $ax+2by+ay+2bx$.

解：(1) $a^2+ab-4a-4b=(a^2+ab)-(4a+4b)$

$$=a(a+b)-4(a+b)$$

$$=(a+b)(a-4),$$

或

$$a^2+ab-4a-4b=(a^2-4a)+(ab-4b)$$

$$=a(a-4)+b(a-4)$$

$$=(a-4)(a+b).$$

(2) $ax+2by+ay+2bx=(ax+ay)(2bx+2by)$

$$=a(x+y)+2b(x+y)$$

$$=(x+y)(a+2b).$$

【例 21】 分解因式：ax^3-ax^2+ax-a.

解：这里，各项都有公因式 a，可先把它提出，然后继续分解．

$$ax^3-ax^2+ax-a=a(x^3-x^2+x-1)$$

$$=a[(x^3-x^2)+(x-1)]$$

$$=a[x^2(x-1)+(x-1)]$$

$$=a(x-1)(x^2+1).$$

练习

把下列各式分解因式:

(1) $2a(x+y)+x+y$; (2) $a^2+ab+ac+bc$;

(3) x^3+3x^2+3x+9; (4) $(ac+bd)-(ad+bc)$.

[(1) $(2a+1)(x+y)$; (2) $(a+c)(a+b)$; (3) $(x^2+3)(x+3)$;

(4) $(a-b)(c-d)$.]

3. 公式法 把前面常用的乘法公式从右向左看，就得到如下因式分解的公式:

平方差公式 $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$;

完全平方公式 $a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$;

完全立方公式 $a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3=(a\pm b)^3$;

立方和立方差公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

这种借助于乘法公式来分解因式的方法，叫做公式法.

【例 22】 分解因式: x^4-y^4.

解: $x^4-y^4=(x^2)^2-(y^2)^2=(x^2+y^2)(x^2-y^2)$.

这里，第二个因式还是两数平方的差，可以继续分解，因此，

$$x^4-y^4=(x^2+y^2)(x+y)(x-y).$$

多项式的因式分解，通常要分解到不能再分解为止.

【例 23】 分解因式:

(1) $x^2-6ax+9a^2$;

(2) $9(a+b)^2+6(a+b)+1$.

解: (1) 式的首项是 x^2; 末项 $9a^2$ 可写成 $(3a)^2$, 中间一项 $-6ax=-2\cdot x\cdot 3a$, 注意这里是负号. 因此可应用完全平方公式. 就是

$$x^2-6ax+9a^2=x^2-2\cdot x\cdot 3a+(3a)^2=(x-3a)^2.$$

(2) 把 $a+b$ 看成一项，就有

$9(a+b)^2+6(a+b)+1=[3(a+b)]^2+2\cdot 3(a+b)\cdot 1+1^2$

$$=[3(a+b)+1]^2$$
$$=(3a+3b+1)^2.$$

【例 24】 分解因式：$x^2+4ax+4a^2-b^2$.

解：把前三项看成一组，应用完全平方公式，再应用平方差公式：

$$x^2+4ax+4a^2-b^2=(x+2a)^2-b^2$$
$$=(x+2a+b)(x+2a-b).$$

【例 25】 把下列各式分解因式：

(1) $8a^3+27b^3$; (2) $-a^8+64a^2$.

解：(1) 式是两个数立方的和，即 $(2a)^3+(3b)^3$，可以用立方和公式，

$$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$$
$$=(2a+3b)[(2a)^2-2a\cdot 3b+(3b)^2]$$
$$=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2).$$

(2) 先提取公因式 a^2，再应用立方差公式与平方差公式：

$$-a^8+64a^2=a^2(-a^6+64)=a^2(64-a^6)$$
$$=a^2[4^3-(a^2)^3]=a^2(4-a^2)(16+4a^2+a^4)$$
$$=a^2(2+a)(2-a)(16+4a^2+a^4).$$

练习

把下列各式分解因式：

(1) $\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{4}y^2$; (2) $(m+n)^2-p^2$;

(3) $3x^3-27x$; (4) $a-b-a^2+b^2$;

(5) x^2-4x+4; (6) $x^3-6x^2+12x-8$.

[(1) $\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y\right)$; (2) $(m+n+p)(m+n-p)$;

(3) $3x(x+3)(x-3)$; (4) $(a-b)(1-a-b)$; (5) $(x-2)^2$;

(6) $(x-2)^3$.]

4．二次三项式的因式分解 我们常常遇到形如

$$x^2+3x+1,\quad 3x^2-2x+2$$

等的二次三项式．一般地说，

$$ax^2+bx+c\quad (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$$

叫做 x 的二次三项式．现在来讨论二次三项式的因式分解．

显然，如果一个二次三项式符合完全平方公式，就可用这个公式来分解，例如例 23．如果一个二次三项式，例如

$$x^2+2x-3,$$

不符合完全平方公式，又怎样因式分解呢？我们可以把这个二次三项式变形，先添上一项，使它和前面二项成为一个完全平方式，然后再减去所添的项．在 x^2+2x-3 中，二次项系数是 1，一次项系数是 2，如果加上一项常数：2 的一半的平方，即$\left(\frac{1}{2}\times 2\right)^2=1$．那么得到 x^2+2x+1，成了完全平方 $(x+1)^2$．所以

$$x^2+2x-3=x^2+2x+1-1-3=(x+1)^2-4.$$

等式的右边恰好符合平方差公式，于是

$$\begin{aligned}x^2+2x-3&=(x+1)^2-4=(x+1)^2-2^2\\&=(x+1+2)(x+1-2)\\&=(x+3)(x-1).\end{aligned}$$

这种分解二次三项式的方法常叫做配方法．

现在再看如何用配方法来分解首项系数不是 1 的二次三项式．例如

$$2x^2+9x+4,$$

我们先把 x^2 的系数 2 提出括号外，

$$\text{原式}=2\left(x^2+\frac{9}{2}x+2\right),$$

然后再对括号里的二次三项式进行配方．就是

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= 2\left(x^2+\frac{9}{2}x+2\right) \\
&= 2\left[x^2+\frac{9}{2}x+\left(\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{9}{4}\right)^2+2\right] \\
&= 2\left[\left(x+\frac{9}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right] \\
&= 2\left(x+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}\right)\left(x+\frac{9}{4}-\frac{7}{4}\right) \\
&= 2(x+4)\left(x+\frac{1}{2}\right) \\
&= (x+4)(2x+1).
\end{aligned}
$$

练习

把下列各式分解因式：

(1) x^2+5x+4;　　　　(2) x^2-5x+6;

(3) $3x^2-4x+1$.

[(1) $(x+1)(x+4)$; (2) $(x-2)(x-3)$; (3) $(3x-1)(x-1)$.]

小　　结

1．**整式的加减法**：

(1) 单项式相加减，就是合并同类项；

(2) 多项式相加减，先去括号，然后合并同类项．

2．**去括号的法则**：

(1) 如果括号前是“+”号，去括号后括号里各项符号不变；

(2) 如果括号前是“−”号，去括号后括号里各项符号都要改变．

3．**整式的乘法**：

(1) 单项式相乘，系数与系数相乘，得到积的系数，乘积中每一字母的指数取这个字母在各个单项式里的指数的和；

(2) 多项式相乘，把一个多项式的每一项分别去乘另一个多项式的每一项，并把所得的积相加．

4. 因式分解一般可用：提取公因式法，公式法，分组分解法；二次三项式还可用配方法.

习　　题

1. 化简：$3xy-2x+6y+5xy-7y+6x-15xy$.

2. 计算：

(1) $(5ac^2d)(-4cd^5)(-3a^3c^2d)$；　(2) $-3y(6u-5v)$；

(3) $\frac{3}{4}xy^2z^3(12kx-24kz)$；　(4) $(6u+7)(3v-4)$；

(5) $(x^4-x^2)(x^5+x^3)$.

3. 用乘法公式计算：

(1) $(2y-1)^2$；　(2) $(9p^2+3q^2)^2$；

(3) $(3i+1)(3i-1)$；　(4) $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$；

(5) $(2x+5y)^3$.

4. 把下列各式分解因式：

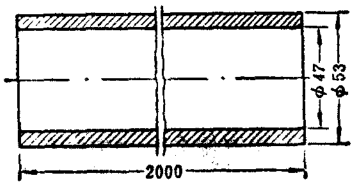
(1) $25u^2-36v^2$；　(2) $64v^3-1$；

(3) m^6-n^6；　(4) $27x^3+27x^2+9x+1$；

(5) $x^2-y^2-z^2+2yz$；　(6) $(p+q+r)^2-64$；

(7) $s^3+5s^2-4s-20$.

5. 某公社用混凝土浇制小型水库的放水涵管，它的内径 $d=47$ cm（在图纸上用 ϕ 表示直径），外径 $D=53$ cm，长 $L=2000$ cm，浇制这只涵管需要多少混凝土？



（单位：厘米）

（第5题）

第二节　分　　式

有些代数式中，除数里含有字母．例如

某生产队共有稻田m亩，总产量为n斤，那么平均亩产量是$\frac{n}{m}$斤；

一只运粮船从产地顺流驶往仓库所在地，如果船速是每小时a里，水流速度是每小时b里，产地与仓库的距离是s里，那么所需的时间是$\frac{s}{a+b}$小时．

这种除数含有字母的代数式叫做分式．

一、分式的基本性质

一个分数是一个数，它就是两个整数相除的结果，例如$\frac{3}{2}=3\div2$，$-\frac{5}{6}=\frac{-5}{6}=-5\div6$．一个分式$\frac{s}{a+b}$是一个代数式，同时也是整式$s$被整式$a+b$所除的结果．如果已知$a=5$，$b=3$，$s=30$，那么

$$\frac{s}{a+b}=\frac{30}{5+3}=\frac{30}{8}=\frac{15}{4}.$$

由此可看出，分式是分数的普遍形式．毛主席教导我们："**普遍性即存在于特殊性之中**"．我们从分数的性质可以得出分式的性质．

在分式中，字母不能取使分母为零的值．

例如在$\frac{x+2}{x-2}$中，如果取$x=2$，那么$\frac{x+2}{x-2}$变成$\frac{4}{0}$，这时分式就没有意义．因此这里的x不能等于2．

在分式里，分子和分母同时乘以或除以一个不等于零的代数式，分式的值不变.

例如，当 $m\neq 0$ 时，$\dfrac{a}{b}=\dfrac{am}{bm}$；

当 $n\neq 0$ 时，$\dfrac{an}{bn}=\dfrac{a}{b}$.

这就是分式的基本性质，在分式运算中它起着重要的作用.

二、分式的乘除法

与分数的乘法一样，两个分式相乘，把分子相乘作积的分子，分母相乘作积的分母，再约去分子和分母的公因式，化为最简分式．例如

$$\frac{a^2}{bc}\times\frac{b^2c}{a^3}=\frac{a^2b^2c}{bca^3}=\frac{a^2bc\cdot b}{a^2bc\cdot a}=\frac{b}{a}.$$

在算术里，分数的除法是转化为乘法来计算的，因为除以一个数等于乘以这个数的倒数．同样，分式的除法也是转化为乘法来做的．例如

$$\frac{bd}{a}\div\frac{a^2d}{bc}=\frac{bd}{a}\times\frac{bc}{a^2d}=\frac{b^2cd}{a^3d}=\frac{b^2c}{a^3}.$$

【例 1】 计算 $\dfrac{x+2}{x-3}\times\dfrac{(x-3)^2}{(x+2)^3}$.

解：$$\frac{x+2}{x-3}\times\frac{(x-3)^2}{(x+2)^3}=\frac{(x+2)(x-3)^2}{(x-3)(x+2)^3}$$

$$=\frac{(x+2)(x-3)(x-3)}{(x-3)(x+2)(x+2)^2}=\frac{x-3}{(x+2)^2}.$$

在分式运算的过程中，往往要把分子和分母先进行因式分解，然后才能约去它们的公因式.

【例 2】 计算 $\dfrac{a-b}{a^2+ab}\times\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}$.

解：$\dfrac{a-b}{a^2+ab}\times\dfrac{a^2-b^2}{a^2-ab}=\dfrac{(a-b)(a^2-b^2)}{(a^2+ab)(a^2-ab)}$

$$=\frac{(a-b)(a+b)(a-b)}{a(a+b)a(a-b)}=\frac{a-b}{a^2}.$$

【例 3】 计算 $\dfrac{2}{a^2-1}\div\dfrac{5}{1-a}$.

解：$\dfrac{2}{a^2-1}\div\dfrac{5}{1-a}=\dfrac{2}{a^2-1}\times\dfrac{1-a}{5}=\dfrac{2(1-a)}{(a^2-1)\cdot 5}$

$$=\frac{-2(a-1)}{5(a+1)(a-1)}=-\frac{2}{5(a+1)}.$$

【例 4】 计算 $\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}\div\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$

解：$\dfrac{x^2+x}{x^2+x-2}\div\dfrac{x^2+3x+2}{x+2}$

$$=\frac{x^2+x}{x^2+x-2}\times\frac{x+2}{x^2+3x+2}=\frac{(x^2+x)(x+2)}{(x^2+x-2)(x^2+3x+2)}$$

$$=\frac{x(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)(x+1)(x+2)}=\frac{x}{(x+2)(x-1)}.$$

练习

计算：

(1) $\dfrac{8xy}{5ab}\times\dfrac{10a^2bc}{2x^2}$; (2) $\dfrac{y^2}{x}\div\dfrac{3y^2}{x^2}$;

(3) $\dfrac{x^2-xy}{x^2+xy}\times\dfrac{x^2y+xy^2}{xy}$; (4) $\dfrac{a^2-b^2}{a^3-a^2b}\div\dfrac{a^2+ab}{(a-b)^2}$.

$\left[(1)\ \dfrac{8acy}{x};\ (2)\ \dfrac{x}{3};\ (3)\ x-y;\ (4)\ \dfrac{(a-b)^2}{a^3}.\right]$

三、分式的加减法

分式的加减运算法则与分数的加减法也是一样的．同分母的分式相加减，分母不变，分子相加减．例如：

$$\frac{2x}{x-1}+\frac{x+1}{x-1}-\frac{x}{x-1}=\frac{2x+(x+1)-x}{x-1}=\frac{2x+1}{x-1};$$

$$\frac{x^2}{(x+y)^2}-\frac{y^2}{(x+y)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x+y)^2}=\frac{(x+y)(x-y)}{(x+y)(x+y)}=\frac{x-y}{x+y}.$$

这里要注意，所得的结果也要约去分子和分母公有的因式.

分母不相同的分式相加减，先化为同分母的分式，然后再加减.

【例 5】 计算 $\frac{1}{3xy^2}+\frac{5}{12x^3y^3}+\frac{3}{4x^3y}$.

解：先把它们化为同分母的分式. 这里三个分式的分母都是单项式. 从分母的系数来看，3, 12 和 4 的最小公倍数是 12; 从字母来看，x 的最高次幂是 x^3，y 的最高次幂是 y^3，把 12, x^3 和 y^3 连乘起来，就得到公分母 $12x^3y^3$. 为了使这三项的分母都等于 $12x^3y^3$，把各分式的分子和分母都乘以适当的因式，然后再相加：

$$\begin{aligned}\frac{1}{3xy^2}+\frac{5}{12x^3y^3}+\frac{3}{4x^3y}&=\frac{4x^2y}{3xy^2\cdot 4x^2y}+\frac{5x}{12x^2y^3\cdot x}+\frac{3\cdot 3y^2}{4x^3y\cdot 3y^2}\\&=\frac{4x^2y}{12x^3y^3}+\frac{5x}{12x^3y^3}+\frac{9y^2}{12x^3y^3}\\&=\frac{4x^2y+5x+9y^2}{12x^3y^3}.\end{aligned}$$

当分母是多项式时，先把分母因式分解，然后找出公分母.

【例 6】 计算 $\frac{x}{x^2-1}+\frac{y}{x^2-2x+1}$.

解：$\frac{x}{x^2-1}+\frac{y}{x^2-2x+1}$

$$\begin{aligned}&=\frac{x}{(x+1)(x-1)}+\frac{y}{(x-1)^2}\\&=\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)^2}+\frac{(x+1)y}{(x+1)(x-1)^2}\\&=\frac{x(x-1)+(x+1)y}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{x^2+xy-x+y}{(x+1)(x-1)^2}.\end{aligned}$$

练习

计算:

(1) $\dfrac{x^2+3}{x+2}+\dfrac{3x+7}{x+2}$;　　(2) $\dfrac{2x-1}{x-2}-\dfrac{2(x-5)}{x^2-4}$;

(3) $x+\dfrac{1}{x}$;　　(4) $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{1}{x-1}-3x$.

[(1) $\dfrac{x^2+3x+10}{x+2}$;　(2) $\dfrac{2x^2+x+8}{x^2-4}$;　(3) $\dfrac{x^2+1}{x}$;

(4) $\dfrac{5x-3x^3}{x^2-1}$.]

小　　结

1. 分式的基本性质: 分式的分子和分母同乘以或除以一个不为零的代数式,分式的值不变.

2. 分式的加减法: 同分母的分式相加减, 分母不变, 分子相加减; 异分母的分式相加减,先把它们化为同分母的分式,然后再加减.

3. 分式的乘除法:

$$相乘:\ \frac{b}{a}\cdot\frac{d}{c}=\frac{bd}{ac};$$

$$相除:\ \frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=\frac{bc}{ad}.$$

习　　题

1. 计算下列各题:

(1) $\dfrac{1}{2x^2y}+\dfrac{5}{x^3y^3}+\dfrac{2}{5xy^2}$;　　(2) $\dfrac{3p+4q}{22pq^3}+\dfrac{6p-5q}{33pq^3}$;

(3) $\dfrac{3u}{u^3-8}-\dfrac{5}{u^2-4u+4}$.

2. 计算下列各题:

(1) $\dfrac{36x^2y}{55}\times(-33xy^3)$;　　(2) $\dfrac{7x-14}{4x+8}\times(x^2+5x+6)$;

(3) $\frac{3p^2}{7q^2}\div\frac{9p^2}{14q}$;　　(4) $\frac{64x^3-16}{8x+4}\div(4-8x)$.

3. 某生产队原计划在 m 天里完成 N 亩的收割任务. 经过批林批孔运动，广大贫下中农的社会主义积极性空前高涨，准备提前 n 天完成. 问平均每天要比原计划多收割多少亩? 并计算当 $N=160$, $m=10$, $n=2$ 时,每天多收的亩数.

4. 甲队在 n 天内能筑堤 a 米,乙队在 m 天内能筑堤 b 米. 现在两队同时筑堤 R 米,需几天完成?

第三节　根　　式

在实际问题中,经常要用到式的开方运算. 例如:建造一个育苗棚(图 2-7)，宽为 a 尺，高墙与低墙的高分别为 b 尺和 c 尺,那么根据勾股定理,有

$$l^2=a^2+(b-c)^2,$$

因此,上面覆盖的塑料薄膜的宽约为

$$l=\sqrt{a^2+(b-c)^2}.$$

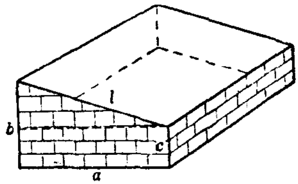


图 2-7

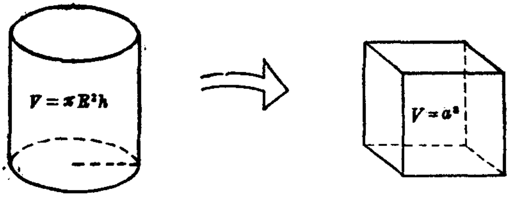


图 2-8

把一块底面半径为 R 厘米，高为 h 厘米的圆钢，锻打成一个正方体（不计损耗），我们来计算这个正方体的棱长 a（图2-8）．因为正方体的体积等于这块圆钢的体积，即

$$a^3=\pi R^2 h,$$

所以正方体的棱长

$$a=\sqrt[3]{\pi R^2 h}.$$

象前面所得到的 $\sqrt{a^2+(b+c)^2}$ 和 $\sqrt[3]{\pi R^2 h}$ 等含有开方运算的代数式，叫做根式．$2\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$ 等等也可以看作是根式．

一、根式的化简

在第一章里，我们学过算术根的三个性质：

(1) $(\sqrt[n]{a})^n=\sqrt[n]{a^n}=a$；　　(2) $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$；

(3) $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

这也是根式的性质．

根据上述性质，我们可以看到：

$$(\sqrt[np]{a^{mp}})^{np}=a^{mp},$$

$$(\sqrt[n]{a^m})^{np}=[(\sqrt[n]{a^m})^n]^p=(a^m)^p=a^{mp},$$

所以

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

这就是说：根指数和被开方式的指数同乘以（或除以）一个正整数，根式的值不变．这是根式的一个基本性质．

利用以上性质，我们可以化简根式．例如

(1) $\sqrt[6]{4a^2b^4}=\sqrt[6]{(2ab^2)^2}=\sqrt[3\times 2]{(2ab^2)^2}=\sqrt[3]{2ab^2}$.

这就是，当被开方式的指数和根指数有公约数时，可以约去，

使根式简化.

(2) $\sqrt[3]{ab^3c^6}=\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b^3}\cdot\sqrt[3]{c^6}=bc^2\sqrt[3]{a}$.

这就是说，可以把根号内的因式提到根号外，使被开方式每一因式的指数都低于根指数.

(3) $\sqrt{\dfrac{x}{(x+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+1)^2}}=\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$;

$$\sqrt[3]{\frac{2x}{(x-1)^2}}=\sqrt[3]{\frac{2x(x-1)}{(x-1)^3}}=\frac{\sqrt[3]{2x(x-1)}}{\sqrt[3]{(x-1)^3}}$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2x(x-1)}}{x-1}.$$

这就是说，当被开方式是一个分式时，我们总可以在分子和分母上同乘以一个适当的代数式，使分母不含有根式.

如果一个根式具有如下几个特点：(1) 被开方式的指数和根指数没有公约数；(2) 被开方式每一个因式的指数都小于根指数；(3) 分母不含有根式，那么这种根式叫做**最简根式**. 化简根式要化简到最简根式.

【例 1】 把下列根式化成最简根式：

(1) $\sqrt{x^3(x+1)^2}$;　　(2) $\sqrt[3]{\dfrac{4x^3}{(x-2)^4}}$;

(3) $2\sqrt[4]{\dfrac{a^2(x+1)^2}{4x^2}}$.

解：(1) $\sqrt{x^3(x+1)^2}=x(x+1)\sqrt{x}$.

(2) $\sqrt[3]{\dfrac{4x^3}{(x-2)^4}}=\sqrt[3]{\dfrac{4x^3(x-2)^2}{(x-2)^6}}$

$$=\frac{x}{(x-2)^2}\sqrt[3]{4(x-2)^2}.$$

(3) $$2\sqrt[4]{\frac{a^2(x+1)^2}{4x^2}}=2\sqrt[4]{\left[\frac{a(x+1)}{2x}\right]^2}=2\sqrt{\frac{a(x+1)}{2x}}$$

$$=2\sqrt{\frac{a(x+1)\cdot 2x}{(2x)^2}}$$

$$=\frac{2}{2x}\sqrt{2ax(x+1)}$$

$$=\frac{1}{x}\sqrt{2ax(x+1)}.$$

【例 2】 计算:

(1) $\sqrt{\frac{1}{3}}$, (2) $\frac{4}{\sqrt{20}}$;

(3) $\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

解: (1) $\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1\times 3}{3\times 3}}=\frac{1}{3}\sqrt{3}=\frac{1}{3}\times 1.732=0.577.$

(2) $$\frac{4}{\sqrt{20}}=\frac{4}{\sqrt{4\times 5}}=\frac{4}{2\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{2}{5}\times 2.236=0.894.$$

(3) $$\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

$$=\frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{3-2}=3(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

$$=3(1.732-1.414)$$

$$=3\times 0.318=0.954.$$

练习

1. 化简下列各根式:

(1) $\sqrt[6]{a^2b^4}$; (2) $\sqrt{16a^2b^2(a+2)^3}$;

(3) $(a+1)\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$.

2. 计算:

(1) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; (2) $\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$.

[1. (1) $b\sqrt{a}$; (2) $4ab(a+2)\sqrt{a+2}$; (3) $\sqrt{a^2-1}$.

2. (1) 0.447; (2) 1.366.]

二、分数指数幂

我们在第一章里，已经把幂的概念从正整数指数幂推广到零指数幂和负整数指数幂，现在要进一步推广到分数指数幂.

先看两个例题:

$$\sqrt{a^4}=a^2=a^{\frac{4}{2}},$$

$$\sqrt[3]{a^6}=a^2=a^{\frac{6}{3}}.$$

上述两题说明，如果 n 是 m 的整数倍，则 $\sqrt[m]{a^n}$ 等于 $a^{\frac{n}{m}}$. 我们把这种记法推广到 m 与 n 为任意正整数的情形，即 $\sqrt[m]{a^n}$ 规定可用 $a^{\frac{n}{m}}$ 来记，这里 $\frac{n}{m}$ 一般是一个分数. 也就是

$$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}} \quad (a>\text{或}=0).$$

并且规定

$$\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}=a^{-\frac{n}{m}} \quad (a>0).$$

$a^{\frac{n}{m}}$ 和 $a^{-\frac{n}{m}}$ 都叫做 a 的分数指数幂.

这样规定以后，根式和分数指数幂可以相互转化.

【例 3】 把下列根式记成分数指数幂的形式:

(1) $\sqrt{x^3}$; (2) $2\sqrt{2}$;

(3) $x^2\sqrt{x}$; (4) $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

解：(1) $\sqrt{x^3}=x^{\frac{3}{2}}$.

(2) $2\sqrt{2}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{8}=8^{\frac{1}{2}}$.

(3) $x^2\sqrt{x}=\sqrt{x^4x}=\sqrt{x^5}=x^{\frac{5}{2}}$.

(4) $\sqrt{\dfrac{x}{y}}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}$.

【例 4】 把下列分数指数幂记成根式的形式：

(1) $x^{\frac{3}{2}}$; (2) $y^{-\frac{3}{2}}$;

(3) $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$.

解：(1) $x^{\frac{3}{2}}=\sqrt{x^3}$.

(2) $y^{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{y^3}}$.

(3) $a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{a}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

练习

1. 把下列根式记成分数指数幂的形式：

(1) $\sqrt[3]{3}$; (2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$;

(3) $\sqrt[3]{7^2}$.

2. 把下列分数指数幂记成根式的形式：

(1) $3^{\frac{1}{3}}$; (2) $2^{-\frac{1}{3}}$;

(3) $x^{\frac{4}{3}}$.

[1. (1) $3^{\frac{1}{3}}$; (2) $3^{-\frac{1}{3}}$; (3) $7^{\frac{2}{3}}$. 2. (1) $\sqrt[3]{3}$; (2) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$; (3) $\sqrt[3]{x^4}$.]

在第一章里，我们知道整数指数幂的运算法则是：

(1) $a^m\cdot a^n=a^{m+n}$; (2) $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$;

(3) $(ab)^n=a^nb^n$.

它们对于分数指数幂也成立。

三、根式的运算

1. 根式的加减法 如果几个根式的被开方式和根指数都相同，那么它们叫做同类根式．例如 $\sqrt{a}$，$\frac{1}{2}\sqrt{a}$ 和 $-2\sqrt{a}$ 是同类根式．又如 $\sqrt{2}$ 与 $5\sqrt{50}$ 虽然被开方式不同，但是可以变形，$5\sqrt{50}=5\sqrt{25\times2}=25\sqrt{2}$．因此，$\sqrt{2}$ 与 $5\sqrt{50}$ 是能够化成同类根式的．

在整式的加减法中，要合并同类项．同样，在根式加减法中，要合并同类根式．

【例5】 计算：

(1) $3\sqrt{2}+\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{2}$； (2) $\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$．

解：(1) $3\sqrt{2}+\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{2}=\left(3+1-\frac{1}{3}\right)\sqrt{2}$

$$=\frac{11}{3}\sqrt{2}.$$

(2) $\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}$

$$=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\sqrt{6}$$

$$=\frac{1}{6}\sqrt{6}.$$

【例6】 计算．$3\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$．

解：$3\sqrt{2}-\sqrt{2}+\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$

$$=3\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$=(3-1)\sqrt{2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\sqrt{6}=2\sqrt{2}+\frac{1}{6}\sqrt{6}.$$

2. 根式的乘法和除法　如果几个根式的根指数相同，那么它们叫做同次根式　例如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{x+1}$ 和 $-2\sqrt{a+b}$ 是同次根式．而 $\sqrt[3]{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 不是同次根式，但

$$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\times2]{2^2}=\sqrt[6]{2^2},\quad \sqrt{5}=\sqrt[2\times3]{5^3}=\sqrt[6]{5^3},$$

所以 $\sqrt[3]{2}$ 与 $\sqrt{5}$ 可以化成同次根式 $\sqrt[6]{2^2}$ 与 $\sqrt[6]{5^3}$.

我们知道，

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \text{ 和 } \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\quad (b\neq0)。$$

从右向左看，就得到同次根式的乘法和除法的法则，即

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab};\quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\quad (b\neq0).$$

这就是说：同次根式相乘，把被开方式相乘，根指数不变；同次根式相除，把被开方式相除，根指数不变．不是同次根式相乘或相除，先要把它们化为同次根式，再相乘或相除．所得的结果都要化简．

【例 7】 计算：

(1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$；　　(2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}$；

(3) $\sqrt{5x^3}\div\sqrt{x}$；　　(4) $2\sqrt[3]{x^2}\div\sqrt[3]{x}$.

解：(1) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{2\times5}=\sqrt[3]{10}$.

(2) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{5}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{2^2\times5^3}=\sqrt[6]{500}$.

(3) $\sqrt{5x^3}\div\sqrt{x}=\sqrt{\frac{5x^3}{x}}=\sqrt{5x^2}=\sqrt{5}\,x$.

(4) $2\sqrt[3]{x^2}\div3\sqrt{x}=\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}=\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt[6]{(x^2)^2}}{\sqrt[6]{x^3}}$

$$=\frac{2}{3}\sqrt[6]{\frac{x^4}{x^3}}=\frac{2}{3}\sqrt[6]{x}.$$

有时为了计算方便，我们可以把根式的乘、除、乘方和开方运算转化为幂的运算。

【例 8】 计算：

(1) $\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}}$； (2) $\sqrt[3]{(x+y^2)\sqrt{x+y^2}}$.

解：(1) $\dfrac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}}=\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{2}}}=a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{-\frac{1}{2}}$

$$=a^{\frac{1}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}}=a^{\frac{4}{6}}=a^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{a^2}.$$

(2) $\sqrt[3]{(x+y^2)\sqrt{x+y^2}}=[(x+y^2)(x+y^2)^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{3}}$

$$=[(x+y^2)^{\frac{3}{2}}]^{\frac{1}{3}}$$

$$=(x+y^2)^{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}}$$

$$=(x+y^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x+y^2}.$$

练习

计算：

(1) $3\sqrt{8}+2\sqrt{2}$； (2) $\sqrt[6]{27}+\sqrt[4]{9}$；

(3) $9\sqrt{45}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$； (4) $\dfrac{\sqrt{\frac{a}{b}}\times\sqrt[4]{\frac{a^3}{b}}}{\sqrt[6]{\frac{a^2}{b^5}}}$.

[(1) $8\sqrt{2}$； (2) $2\sqrt{3}$； (3) $27\sqrt{30}$； (4) $\sqrt[12]{a^{11}b}$.]

小　　结

1. 根式的基本性质：根指数和被开方式的指数同乘以(或除以)一个正整数，根式的值不变，就是

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}.$$

2. 化简根式的三个要求:

(1) 被开方式的指数和根指数没有公约数;

(2) 被开方式每一个因式的指数都小于根指数;

(3) 分母不含根式.

3. 同类根式是根指数相同,被开方式也相同的根式.

4. 同次根式是根指数相同的根式.

5. 根式的加减法就是合并同类根式.

6. 根式的乘除法只有在同次根式的条件下才能进行;不是同次根式相乘除,要先化为同次根式后再乘除.

习　题

1. 计算下列各式:

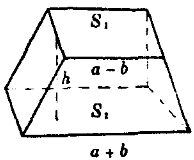
(1) $\sqrt{3}+5\sqrt{3}$;　　(2) $5\sqrt{2}-\sqrt{50}$;

(3) $\sqrt{24}-\sqrt{\dfrac{1}{5}}+\sqrt{112}$;　　(4) $(11\sqrt{3x})^2$;

(5) $(5-\sqrt{3})^2$;　　(6) $(3-\sqrt{6})(3+\sqrt{6})$;

(7) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$;　　(8) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

2. 棱台或圆台的体积公式是 $V=\dfrac{1}{3}h(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$,这里 S_1 和 S_2 是上下两个底的面积, h 是高. 今有一个正四棱台(上下两个底都是正方形)如图所示,试计算它的体积.



(第 2 题)

3. 估计黄砂、石子的方数时,常堆成一个棱台,用一个简便公式

$$V=\frac{1}{2}(S_1+S_2)h$$

计算．今有一堆黄砂堆成正四棱台形，高0.6米，上底、下底的边长分别为2.5米和3.5米．试用理论公式和简便公式计算方数，它们相差多少？

第四节　一元一次方程和一元一次不等式

一、什么叫做一元一次方程

在生产实践中遇到的问题，往往有些数量是给定的，另外一些数量要通过计算求出来．例如某大队的渠道中，地下渠道(暗渠)有960米，其余是地上的明渠，计有3480米．今年计划再把部分明渠修成暗渠，使暗渠的长与明渠相等，应将多少明渠改为暗渠．

这里“960米”和“3480米”都是已知数，把多少米明渠改为暗渠这是一个未知数．我们假定它是x米．那么怎样从已知数量去求得适合问题需要的未知的数量，化未知为已知呢？“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”．我们可从已知量和未知量之间的联系中去分析．如果明渠有x米改成了暗渠，那么它就剩$(3480-x)$米，暗渠增加了x米，共有$(960+x)$米．这时，要求明渠、暗渠相等．因此，我们可以列出等式

$$960+x=3480-x,$$

这个等式反映了已知数量和未知数量间的联系．一个含有未知数的等式叫做方程．如果等式的两边都是整式，那么这个方程叫做整式方程．只含有一个未知数，而且未知数的最高

次数是一次的整式方程，叫做一元一次方程．例如

$$3x-1=5,\quad \frac{x}{2}+\frac{1}{3}=4x+1,$$

$$\frac{1}{2}(5x-1)+\frac{1}{3}(x+2)=3$$

都是一元一次方程．

在方程 $3x-1=5$ 里，以 2 代未知数 x，那么方程的两边都等于 5．象这样能使方程两边相等的未知数的值，叫做方程的解．求方程的解的过程，叫做解方程．

二、怎样求出一元一次方程的解

为了求出一元一次方程的解，我们先来说明等式的基本性质．

比如两个粮仓存粮数相等，如果同时都运进或运出相同斤数的粮食，那么结果两个粮仓的存粮数还是相等的；如果同时把存粮数扩大或缩小相同的倍数，那么两个粮仓的存粮也还是相等的．我们以 a 和 b 表示两仓存粮的斤数，c 表示运进或运出的斤数．那么当 $a=b$ 时，

$$a+c=b+c;\quad a-c=b-c.$$

如果以 k 表示倍数，就有

$$a\cdot k=b\cdot k;\quad \frac{a}{k}=\frac{b}{k}\quad (k\neq 0).$$

一般地说，等式的两边分别加上、减去、乘以或除以相同的数，等式仍然成立（除数不能是零）．把这个性质运用到方程上，就得到把未知数向已知数转化的方法，也就是解方程的方法．

【例 1】 解方程 $3x-1=5$．

解：方程两边各加上 1，得

$$3x-1+1=5+1,$$

整理后得 $$3x=6.$$

两边都除以 3 $$\frac{3x}{3}=\frac{6}{3},$$

就是 $$x=2.$$

所以原方程的解是 2.

【例 2】 解本节开头的方程：$960+x=3480-x$.

解：等式两边各加上 x，得

$$960+x+x=3480-x+x,$$

就是 $$960+2x=3480.$$

两边各减去 960， $$960+2x-960=3480-960,$$

就是 $$2x=2520.$$

两边各除以 2，就得 $$x=1260(\mathrm{m}).$$

这就是说，要使暗渠与明渠的长相等，应该把 1260 米明渠改为暗渠.

从上面的两例可以看到，例 1 中方程两边各加上 1，相当于方程左边的(-1)变号后移到方程的右边，即

变号

$$3x-1=5 \longrightarrow 3x=5+1.$$

同样，例 2 中方程两边加上 x，相当于方程右边的$(-x)$变号后移到方程的左边；而方程两边各减去 960，等于将 960 变号后移到方程的右边，即

变号

$$960+x=3480-x \longrightarrow +x+x=3480-960$$

变号

这就是说，方程中的项改变符号后，可以从方程的一边

移到另一边，等式仍然成立．这种方法叫做移项．

通常把含有未知数的项移到方程的左边，把不含未知数的项移到方程的右边．

【例 3】 解方程：$3(x-2)=2(2x+1)$.

解：先去括号，得

$$3x-6=4x+2,$$

移项，得 $$3x-4x=2+6,$$

就是 $$-x=8,$$

两边各除以 -1，得

$$x=-8.$$

【例 4】 解方程：$\dfrac{x+2}{6}-\dfrac{x-7}{3}=1$.

解：原方程中分母的最小公倍数是 6，两边都乘以 6，得

$$(x+2)-2(x-7)=6.$$

去括号，得 $$x+2-2x+14=6,$$

就是 $$-x+16=6,$$

移项，得 $$-x=6-16,$$

就是 $$-x=-10,$$

两边都乘以 -1，得

$$x=10.$$

【例 5】 解方程：$\dfrac{45}{x+3}=5$.

解：原方程的未知数在分母中．但方程两边同乘以 $(x+3)$，去分母后可化为一元一次方程，即

$$45=5(x+3).$$

两边都除以 5，得 $$9=x+3,$$

移项，得 $$x=6.$$

练习

解下列各方程:

(1) $\frac{2x}{3}=8$;　　(2) $3(x-2)=2(2x+1)$;

(3) $\frac{y-2}{3}+\frac{2y-1}{6}=1$;　　(4) $\frac{27}{x-6}=9$.

$\left[(1)\ 12;\ (2)\ -8;\ (3)\ 2\frac{3}{4};\ (4)\ 9.\right]$

三、农村应用举例

应用一元一次方程解决实际问题时，首先要分析问题的条件,弄清哪些是已知的,哪些是未知的,再适当选取一个未知数,用 x 或其他字母表示,其他未知数用 x 的代数式表示,然后分析它们之间的内在联系，找到具有等量关系的两个代数式(其中一个可不含有 x)，即可列出方程，最后求出方程的解.下面举例说明.

【例 6】 某生产队有水田 204 亩，旱田 86 亩，为了增产粮食，计划将部分旱田改为水田．如果要求水田的面积是旱田面积的 4 倍,应将多少亩旱田改为水田?

解：我们设将 x 亩旱田改为水田,那么水田共有$(204+x)$亩,旱田共有$(86-x)$亩,这时水田是旱田的 4 倍,可以得出等式

$$204+x=4(86-x).$$

我们来解这个方程．先去括号,得

$$204+x=344-4x,$$

移项

$$x+4x=344-204,$$

整理后得

$$5x=140,$$

两边各除以 5，就得　　$x=28$(亩).

即将 28 亩旱田改为水田后，水田的面积是旱田的 4 倍.

【例 7】 某大队为了多养猪，需要造一只能装 120 担浆水*的长方体饲料池. 如果池深 1.2 米，宽 1.8 米，它的长应是多少(1 立方米可装浆水 20 担)？

解：设饲料池的长是 y 米，那么它的容积将是 $1.2\times1.8y$ 立方米. 因为每立方米可装浆水 20 担，所以一共可装 $1.2\times1.8y\times20$ 担. 根据题意，要求装 120 担，可列出方程

$$1.2\times1.8\times20y=120.$$

解这个方程，　　$43.2y=120$,

$$y\approx2.8(\mathrm{m}).$$

即这只饲料池长应是 2.8 米.

为了选种育苗，需测定种子的含水量. 测定的方法一般是把种子放在 130°C 的烘箱里烘 40 分钟，然后放入干燥器内冷至室温，根据称得的烘前重量和烘后重量，按下式求出含水率：

$$\text{含水率}=\frac{\text{烘前重量}-\text{烘后重量}}{\text{烘前重量}}.$$

【例 8】 现有种子 4 克，假定含水率是 $\frac{16}{100}$，问烘后重量应是多少？

解：设烘后的重量是 x 克，那么根据上面的公式就有

$$\frac{16}{100}=\frac{4-x}{4}.$$

两边各乘以 100，得　　$16=25(4-x)$,

去括号，得　　$16=100-25x$,

移项、整理后，得　　$25x=84$.

---

* 浆水是淀粉厂的下脚，可作猪饲料.

即 $$x=3.36(\text{克}).$$

【例 9】 新农药“杀螟松”是防治稻螟的特效药，一般可稀释 1500 倍喷雾. 现有喷雾器每只可装水 28 市斤，需加“杀螟松”乳剂多少毫升？(每市斤水的容积是 500 毫升.)

1 份药剂加水稀释到 1500 份，叫做稀释 1500 倍. 这就是说，1 毫升药应加水 1499 毫升. 实际上，当稀释倍数很大时，例如 1500 倍，就把一毫升药剂加水 1500 毫升. 一般可按下面公式计算：

稀释液的毫升数=原液毫升数×稀释倍数.

解：设需用“杀螟松”乳剂 x 毫升. 每市斤水的容积是 500 毫升，所以 28 市斤水的容积是 28×500 毫升. 根据题意，得

$$28\times500=1500x.$$

解这个方程，得

$$x=9.3(\text{毫升}).$$

即每只喷雾器应加“杀螟松”乳剂 9.3 毫升.

练习

1. 防治稻飞虱、红蜘蛛等，一般可用乐果乳剂稀释 2000 倍喷雾. 现有喷雾器每只可装水 16 市斤，需加乐果乳剂多少毫升？
2. 某农机厂要锻造一个直径为 10 厘米，高为 8 厘米的圆柱形零件毛坯，应截取直径为 8 厘米的圆钢长多少？

[1. 4 毫升；2. 12.5 厘米.]

四、什么叫做不等式

实施爆破时，导火线燃烧的速度是每秒 0.8 厘米，人跑开的速度是每秒 4 米，为了使点燃导火线的战士在爆破时能跑到 500 米以外的安全地区去，导火线至少要多少长？

设导火线长 x 厘米，那么导火线燃烧的时间是 $\frac{x}{0.8}$ 秒. 战士到达安全地点的时间是 $\frac{500}{4}$ 秒. 依题意，应有

$$\frac{x}{0.8}>\frac{500}{4}.$$

在上面的表示式中，左右两边都是代数式，中间用不等号"$>$"相连. 用不等号"$>$"或"$<$"连结两个代数式所成的式子，叫做不等式. 上例中的不等式只含有一个未知数 x，而且它的最高次数是一次，这样的不等式叫做一元一次不等式.

在不等式 $\frac{x}{0.8}>\frac{500}{4}$ 中，当 $x>100$ 时，不等式成立. 当 $x\leqslant 100$ 时(符号"$\leqslant$"表示"小于或等于")，不等式不能成立. 能使不等式成立的未知数的取值范围，叫做不等式的解. 求不等式解的过程叫解不等式. 不等式的解可以在数轴上表示出来. 例如 $x>100$ 可以用数轴上表示 100 的点的右边所有的点来表示(图 2-9).

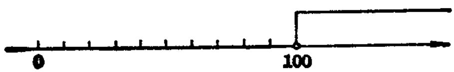


图 2-9

$x=100$ 不是原不等式的解，在数轴上表示 100 的点不在解的取值范围内，我们用空心圈表示.

五、怎样求一元一次不等式的解

我们先来看不等式的性质.

例如，在不等式 $5>3$ 的两边都加上 2，那么不等式的左边是 7，右边是 5. 显然，$7>5$ 成立.

在不等式 $-6<-3$ 的两边都减去 4，那么不等式的左边

是 -10，右边是 -7. 同样，$-10<-7$ 成立.

一般地说，不等式的两边都加上（或减去）同一个数，所得的不等式仍能成立. 即如果

$$a>b,$$

那么 $$a+c>b+c,\quad a-c>b-c.$$

根据不等式的这个性质可以知道，方程中的移项对不等式也适用. 即如果 $a-b>0$，那么 $a>b$.

再如，在不等式 $4>3$ 的两边都乘以 2，那么不等式的左边是 8，右边是 6. 显然，$8>6$ 成立.

在不等式 $-3<-2$ 的两边都除以 3，那么，$-1<-\frac{2}{3}$ 也成立.

一般地说，不等式的两边都乘以（或除以）同一个正数，所得的不等式仍能成立. 即如果

$$a>b,\quad c>0,$$

那么 $$ac>bc,\quad \frac{a}{c}>\frac{b}{c}.$$

最后，在不等式 $4>2$ 的两边都乘以 -2，那么不等式的左边是 -8，右边是 -4. 显然，$-8<-4$.

一般地说，不等式的两边都乘以（或除以）同一个负数，必须把不等号的方向改变，所得的不等式才能成立. 即如果

$$a>b,\quad c<0,$$

那么 $$ac<bc,\quad \frac{a}{c}<\frac{b}{c}.$$

这一性质和方程的性质是不同的.

利用上面这些不等式的性质，可以得到解一元一次不等式的方法.

【例 10】 解不等式：$2x-1<5$.

解：移项，得　　　　$2x<5+1$，

就是　　　　　　　　$2x<6$，

两边都除以 2，得　　　$x<3$.

这个解可用数轴上的点表示出来，如图 2-10. 注意，这里在表示 3 的点上用空心圈.

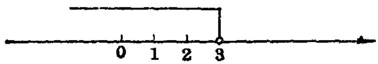


图　2-10

【例 11】　解不等式：$\dfrac{x+3}{3}\geqslant\dfrac{5(x+6)}{6}$（符号"$\geqslant$"表示"大于或等于"）.

解：两边都乘以 6，得

$$2(x+3)\geqslant 5(x+6),$$

去括号，得　　　　$2x+6\geqslant 5x+30$，

移项，得　　　　　$2x-5x\geqslant 30-6$，

就是　　　　　　　$-3x\geqslant 24$，

两边同除以 -3，得　　$x\leqslant -8$.

参阅图 2-11，这里 -8 也包括在解内，所以在表示 -8 的点的位置画上实心圈.

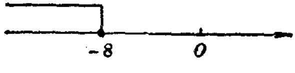


图　2-11

【例 12】　解　　$-12<-6x<12$.

解：这个不等式表示 $(-6x)$ 既要大于 (-12)，又要小于 12，即

$$-6x>-12 \quad 和 \quad -6x<12.$$

分别解这两个不等式，得到

$$x<2 \quad 和 \quad x>-2.$$

因为这两个不等式要同时成立，所以

$$-2<x<2.$$

在数轴上这个不等式的解可以表示成如图 2-12。

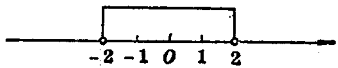


图 2-12

【例 13】 一个工程队要在六天内完成 300 个土方的任务，第一天完成了 60 个土方，根据工程的进展情况，需要提前两天完成任务．问以后几天内，平均每天至少要完成多少土方？

解：根据题意，工作一天后还剩 300－60 个土方．这些土方必须在 3 天(五天提前二天)内完成．

设以后几天内，平均每天至少要完成 x 土方．那么 3 天可完成 $3x$ 土方．我们可以列出不等式

$$3x\geqslant300-60.$$

解此不等式，得

$$x\geqslant80.$$

即以后几天内，平均每天至少要完成 80 土方。

练习

解下列不等式：

(1) $6x+4>2x$; (2) $\frac{x+5}{2}>\frac{x}{3}$;

(3) $3>x-2>-1$.

[(1) $x>-1$; (2) $x>-15$; (3) $5>x>1$.]

小　　结

1．解方程的依据是等式的基本性质：等式的两边分别加上、减去、乘以或除以相同的数，等式仍然成立（除数不能为零）．

2．解不等式的依据是不等式的基本性质：

(1) 不等式的两边同时加上（或减去）同一个数，不等式仍然成立；

(2) 不等式的两边同时乘以（或除以）同一个正数，不等式仍然成立；

(3) 不等式的两边同时乘以（或除以）同一个负数，必须把不等号的方向改变，所得的不等式才能成立．

习　　题

1．解下列方程：

(1) $\frac{3x-2}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{8-2x}{3}$；

(2) $5x-3(2x+1)+7x=6x-4(5-3x)$．

2．圆柱体的体积公式 $V=\pi R^2h$ 中，已知 V 和 R 的数值是 v_1 立方厘米和 r_1 厘米，求 h．

3．我人民解放军某战斗小分队，以每小时 8 公里的速度去执行任务．他们从师部出发行军 27 公里后，师部派通讯员骑摩托车追赶小分队传达紧急通知，要求在 36 分钟内赶上小分队，问通讯员骑摩托车的速度应是多少？

4．解下列不等式：

(1) $\frac{2x-3}{7}<\frac{3x+2}{4}$；　　(2) $\frac{5(x-1)}{6}-1>\frac{2(x+1)}{3}$．

5．某生产队有 71 亩插秧任务，开始两天每天插秧 8 亩，为了在以后五天内完成任务，问以后 5 天内每天插秧的亩数比原来的至少要多几亩．

6．解放前，孔丘后代居住的地方叫“孔府”，它是中国封建社会历史最长的地主庄园，霸占的土地遍及山东、河南、河北、江苏、安徽五省．仅据曲阜红庙村的调查，该村共有土地 2250 亩，“孔府”占有的土

地是贫下中农的10倍还多95亩，地、富占有的土地是贫下中农的5倍少5亩．问“孔府”占有多少土地？地、富占有多少土地？广大贫下中农只有多少土地？

第五节 比和比例

一、比和比例的意义

1．比　比较事物数量的大小关系，可以用一个事物的数量是另一个事物的数量的若干倍来表示，它是用除法得到的(一般写成分数形式)．

例如某生产队今年粮食产量是无产阶级文化大革命前1965年的1.5倍，这是用今年的产量除以1965年的产量而得出的．

一般说来，$\frac{a}{b}$ 又叫做 a 与 b 的比，也常记作 $a:b$(符号“:”读作“比”)．a 叫做比的前项，b 叫做比的后项，$\frac{a}{b}$ 所得的商叫做比值．

例如亩产千斤稻谷需从土壤中吸收氮24斤、磷12斤和钾26斤，因此，

$$\text{所需氮的重量}:\text{所需磷的重量}=24:12=2,$$

即氮的重量是磷的重量的2倍．而

$$\text{所需钾的重量}:\text{所需磷的重量}=26:12=2.16,$$

即钾的重量是磷的重量的2.16倍．

2．百分比　为了增产粮食，某生产队计划每亩施肥100担，其中基肥八十担．那么

$$\text{基肥担数}:\text{总的施肥担数}=80:100$$

这个比的后项为100，前项为80，我们常说，基肥担数是总的

施肥担数的百分之八十，记作 80%．象这样以 100 为后项的比叫做百分比．

因为分数的分子和分母同乘以一个正数，分数的值不变，所以比都可以化为百分比．例如

$$24:12=2:1=200:100,$$

所以这个百分比可记为 200%．

农药的浓度、肥料的成分，往往用百分比表示，例如 40% 的乐果乳剂，即表示 100 斤乳剂中有 40 斤该农药，又如棉籽饼含氮 3.41%，即每 100 斤棉籽饼含氮 3.41 斤．

3．比例　早稻"圭陆矮三号"一般亩产量是 800 斤，高产田可达 1200 斤；大麦"奉矮二棱"的一般亩产量是 400 斤，高产田可达 600 斤．就是

早稻"圭陆三号"高产田产量：一般产量 $=1200:800=3:2$,

大麦"奉矮二棱"高产田产量：一般产量 $=600:400=3:2$.

这里，我们遇到比值相等的两个比，即

$$1200:800=600:400.$$

我们在把比化成百分比的时候，也遇到了这样的等式，如

$$24:12=200:100.$$

这种两个比相等的式子叫做比例式，简称比例．比例一般地可表示为

$$a:b=c:d,$$

a 和 d 叫做比例的外项，b 和 c 叫做比例的内项．比例式也可以写成

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

两边都乘以 bd，就有

$$ad=bc.$$

这就是说，比例的两内项之积等于两外项之积．这样，在比例中已知任意三项，就可以求出另外一项．

例如，已知 $$2:3=x:18,$$

那么就有 $$3x=36.$$

这是一个一元一次方程，显然 $x=12$.

【例 1】 为防治棉花立枯病、猝倒病等，可用有机氯杀菌剂“五氯硝基苯(土壤散)”拌种，用药量是种子重量的 0.5～1%．现有棉花籽 130 斤，如果拌种用药量为 0.8%，应该用“土壤散”多少？

解：设要用“土壤散” x 斤，那么

$$x:130=0.8\%, \text{ 就是 } \frac{x}{130}=\frac{0.8}{100}.$$

所以 $$x=\frac{130\times0.8}{100}=1.04(\text{斤}).$$

即拌 130 斤棉籽，需用“土壤散”约 1 斤．

常用化肥的含氮量如下表所示：

化　　肥	硫酸铵	硝酸铵	硝酸钾	尿　素	氨　水	氯化铵
含　氮　量	20.5%	34%	13.5%	46%	17%	25%

根据此表可以互相换算．

【例 2】 某生产队对稻田施追肥，原计划每亩用硝酸铵 12 斤，后发现仓库里存量不多，改用硫酸铵，每亩应施多少斤？

解：设每亩要用硫酸铵 x 斤，那么原计划 12 斤硝酸铵的含氮量是 $12\times34\%$，改用硫酸铵的含氮量是 $x\times20.5\%$，它们是相等的，即得

$$20.5\%x=12\times34\%.$$

解这个方程: $$\frac{20.5x}{100}=\frac{12\times34}{100},$$

$$20.5x=408,$$

$$x=\frac{408}{20.5}=19.9(\text{斤}).$$

即每亩应施硫酸铵约20斤.

【例3】 用盐水溶液选糯稻种, 要求盐水溶液的浓度为15%. 现有一缸水150斤, 需加盐多少斤?

解: 浓度为15%的盐水溶液, 就是在100斤盐水溶液中含有15斤盐. 这里盐叫做溶质, 水叫做溶剂, 含盐的水叫做溶液. 所以

$$\text{溶液的重量}=\text{溶质的重量}+\text{溶剂的重量},$$

而 $$\text{溶液的浓度}=\frac{\text{溶质的重量}}{\text{溶液的重量}}.$$

设150斤水需加食盐 x 斤(也就是溶质的重量), 那么

$$\text{溶液的重量}=150+x(\text{斤}),$$

$$\text{溶液的浓度}=\frac{x}{150+x}.$$

根据题意, $$\frac{x}{150+x}=15\%,$$

即 $$\frac{x}{150+x}=\frac{15}{100}=\frac{3}{20},$$

$$3(150+x)=20x,$$

$$20x-3x=450,$$

所以 $$x=\frac{450}{17}\approx26.5(\text{斤}).$$

即需加盐26.5斤.

练习

1. 求下列各比的比值:

(1) $4:10$; (2) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$;

(3) $1.25:0.25$.

2. 求下列各比的比值，并化为百分比：

(1) $1:4$; (2) $3:25$;

(3) $150:200$.

3. 求下列各比例中 x 的值：

(1) $3:12=x:24$; (2) $\frac{12}{5}=\frac{4.5}{x}$.

4. 用硫酸铵溶液选种，浓度是 14.5%. 如果要配制硫酸铵溶液 130 斤，需要硫酸铵多少斤？

[1. (1) $\frac{2}{5}$; (2) $\frac{8}{9}$; (3) 5. 2. (1) $\frac{1}{4}$, 25%; (2) $\frac{3}{25}$, 12%; (3) $\frac{3}{4}$, 75%. 3. (1) 6; (2) 1.875. 4. 22 斤.]

二、正比例及其应用

配制农药要保证一定的浓度，才能最有效地灭虫治病. 例如用来消灭稻飞虱的马拉松乳剂，1 斤要用 1500 斤水稀释，如下表所示：

乳 剂 (斤)	1	2	3	4	5	6
加 水 (斤)	1500	3000	4500	6000	7500	9000

从表上可以看出，乳剂重量扩大若干倍，加水的重量也要扩大同样的倍数.

一般地说，两个相联系的量，当其中一个量扩大(或缩小)若干倍时，另一个量也相应地扩大(或缩小)同样的倍数，我们把这两个量叫做成正比例. 换句话说，如果 a 和 b 表示两个成正比例的量，那么 a 的任意两个值 a_1 和 a_2 的比，必等于 b 的对应值 b_1 和 b_2 的比，

$$a_1:a_2=b_1:b_2.$$

【例 4】 如果每 3 斤农药要加水 540 斤，那么 5 斤农药需加多少水？

解：设需加水的重量为 x 斤，因为加水的数量和农药的用量成正比例，所以

$$x:540=5:3,$$

解得
$$x=\frac{5\times 540}{3}=900(\text{斤}),$$

即 5 斤农药需加水 900 斤.

【例 5】 在比例尺是 1:35000000 的地图上，量得北京到井冈山的距离是 4.2 厘米，求北京到井冈山的实际距离.

解：设北京到井冈山的实际距离是 x 公里，依题意，

$$1:35000000=4.2:x.$$

所以
$$x=4.2\times 35000000$$
$$=147000000(\text{厘米}).$$

即
$$x=1470(\text{公里}).$$

【例 6】 某生产队共有地250亩，根据制定的计划，小麦、油菜、豌豆的种植面积的比是 3:1:1. 问小麦、油菜、豌豆各种多少亩？

解：小麦、油菜、豌豆种植面积的比是 3:1:1，就是 5 亩地中小麦种 3 亩，油菜种 1 亩，豌豆种 1 亩.

设 250 亩地中，小麦种 x 亩，油菜种 y 亩，豌豆种 z 亩. 于是有

$$\frac{x}{250}=\frac{3}{5},\quad \frac{y}{250}=\frac{1}{5},\quad \frac{z}{250}=\frac{1}{5}.$$

所以 $x=150(\text{亩}),\quad y=50(\text{亩}),\quad z=50(\text{亩}).$

即种小麦 150 亩，油菜 50 亩，豌豆 50 亩.

氨水具有挥发的特性，在施用之前应该了解它的有效含氮量. 有一种简便但并不十分精确的测定氨水含氮量的方法，叫做称重法. 人们以5000毫升(相当于10市斤水的容积)时氨水的不同重量，结合当时月平均温度(氨水中氮的挥发与气温关系很大)，计算出氨水不同含氮量的数据，制成表格如下.

氨水含氮量称重法测定对照表

5000ml 氨水重量(市斤)		9.20	9.25	9.30	9.35	9.40	9.45	9.50	9.55	9.60
月平均温度	<15°C	16.96	15.86	14.66	13.46	11.86	10.65	9.65	8.45	7.15
	20°C左右	16.90	15.80	14.60	13.40	11.80	10.60	9.60	8.40	7.10
	25°C左右	16.84	15.74	14.54	13.34	11.74	10.55	9.55	8.35	7.05

如果我们称得5000毫升氨水的重量，根据当时月平均温度，就可从表中查得氨水的含氮量(%).

【例7】 现要测定一批氨水的含氮量. 任取一只桶，先放满水，称得水重14斤，倒掉水后放满氨水，称得重12.95斤. 当时月平均气温为21°C(可查有关资料)，问该氨水含氮量多少?

解: 我们知道，水的比重是1，即当500毫升时重1市斤，所以该桶的容积是$500\times14=7000$毫升.

即这批氨7000毫升时重12.95斤. 表中所给的是5000毫升时氨重的含氮量. 我们可以用比例关系来折算. 设这批氨当5000毫升时重x斤，那么就有

$$5000:7000=x:12.95.$$

解这个比例式 $x=\dfrac{12.95\times5000}{7000}=9.25.$

在表中9.25一栏中20°C左右一行中，查得该批氨水含氮量约为15.80%.

练习

1. 为了消灭螟虫，每亩田要用 0.2 斤"治螟灵"加水 400 斤喷洒. 现有一桶水重 50 斤，应加"治螟灵"多少斤？
2. 为测定一批氨水的含氮量，将一只桶放满水后称得水重 16 市斤，放氨水后称得重 15.05 斤，当时月平均温度为 25°C，问含氮量多少？

[1. 0.025斤. 2. 11.74%.]

三、反比例及其应用

两个齿轮互相啮合，主动轮转过一个齿，被动轮也转过一个齿，所以两齿轮每分钟转过的齿数是相等的. 齿轮的转速是齿轮每分钟旋转的转数. 齿轮每分钟转过的齿数，等于转速与这个齿轮齿数的相乘积.

例如，主动轮齿数 $z_1=9$，转速 $n_1=100$ 转/分，那么，每分钟转过的齿数等于 $9\times100=900$ 个。

假定被动轮齿数 $z_2=18$，由于每分钟它跟着主动轮也要转过 900 个齿，所以被动轮的转速只能是 $n_2=50$ 转/分.

就是说，如果被动轮的齿数是主动轮的二倍，那么，被动轮的转速就是主动轮转速的二分之一. 就是

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{z_2}{z_1}.$$

一般地说，如果有两个相联系的量，当其中一个量扩大到原来的几倍时，另一个量反而缩小到原来的几分之一. 我们称这样的两个量成反比例关系. 换句话说，如果 a 和 b 表示两个成反比例的量，那么 a 的任意两个值 a_1 和 a_2 的比，必等于 b 的对应值 b_1 和 b_2 的反比$\left(\frac{b_2}{b_1}\right.$ 叫做 b_1 与 b_2 的反比$\left.\right)$，即

$$a_1:a_2=b_2:b_1.$$

【例 8】 如图 2-13 所示，拖拉机主动轴的转速是 2000 转/分，主动轴的齿轮有 13 个齿；而被动轴的转速是 650 转/分．求被动轴上的齿轮的齿数．

解：设 z_2 是被动轴上工作的齿轮的齿数．已知

$$n_1=2000,\ n_2=650,\ z_1=13,$$

由
$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{z_2}{z_1},$$

得
$$\frac{2000}{650}=\frac{z_2}{13},$$

$$\therefore\quad z_2=\frac{2000\times 13}{650}=40(\text{齿}).$$

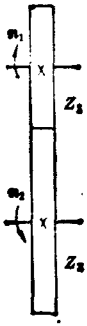


图 2-13

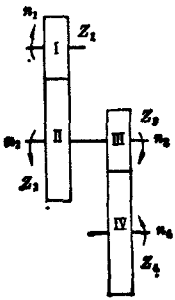


图 2-14

【例 9】 图 2-14 表示两对啮合齿轮传动的装置．已知主动轮 I 的转速为 n_1，齿轮 I, II, III 和 IV 的齿数分别是 z_1, z_2, z_3 和 z_4，求被动轴的转速 n_4．

解：因为 $\dfrac{n_2}{n_1}=\dfrac{z_1}{z_2}$；$\dfrac{n_4}{n_3}=\dfrac{z_3}{z_4}$．

所以
$$n_2=n_1\times\frac{z_1}{z_2};\quad n_3=n_4\times\frac{z_4}{z_3}.$$

齿轮 II 与 III 在同一轴上，显然 $n_2=n_3$，因此，

$$n_1\times\frac{z_1}{z_2}=n_4\times\frac{z_4}{z_3},$$

于是，
$$n_4=\frac{z_1z_3}{z_2z_4}n_1.$$

【例 10】 图 2-15 表示一个皮带轮传动装置．已知主动轮的转速 $n_1=2000$ 转/分，主动轮直径 $D_1=100\ \mathrm{mm}$，被动轮直径 $D_2=50\ \mathrm{mm}$，求被动轮的转速 n_2.

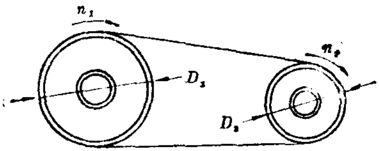


图 2-15

解：皮带轮的传动和齿轮的传动相仿，它们的转速和直径成反比例，即

$$\frac{n_2}{n_1}=\frac{D_1}{D_2}.$$

依题意，这里
$$\frac{n_2}{2000}=\frac{100}{50}.$$

所以
$$n_2=4000\text{ 转/分}.$$

练习

一台机器所用的马达转速是 960 转/分，它的皮带轮直径是 12 厘米，机器上被动轮的直径是 18 厘米，求被动轮的转速．

[640 转/分.]

小　结

1. $\frac{a}{b}$ 也叫做 a 与 b 的比，可记作 $a:b$.

2．表示两个比 $a:b$ 和 $c:d$ 比值相等的式子叫做比例，记作

$$a:b=c:d.$$

3．两个相联系的量，当其中一个量扩大(或缩小)若干倍时，另一个量相应地扩大(或缩小)同样的倍数，那么这两个量叫做成正比例.

4．两个相联系的量，当其中一个量扩大(或缩小)若干倍时，另一个量相反地缩小(或扩大)同样的倍数，那么这两个量叫做成反比例.

习　题

1．一定重量的种子，去掉坏的和杂质后称得它的净重，净重与原来种子的重量的百分比，叫做种子的净度．现有棉籽 120 斤，其中杂质约重 30 斤，求这批棉籽的净度.

2．种子的发芽率，就是试验期内发芽的种子数与试验的种子总数的百分比．现在从干净的种子里取出 200 粒做发芽试验．经过 7 天后，发芽的种子共有 160 粒．求这批种子的发芽率.

3．种子的实用价值就是种子的净度和种子的发芽率的乘积．这标志着一批种子播种后能够发芽的种子占播种的种子的百分比．一批稻种的净度是 75%，发芽率是 80%，求这批种子的实用价值.

4．油菜育秧每亩需 1.6 斤种子．现在一批油菜种子的净度是 85%，发芽率是 75%．如果育秧 3 亩，需用油菜子多少斤?

5．40% 的除虫药按 1:2000 稀释．现在配制 500 斤稀释液，问需用除虫药几斤?

6．一种混凝土的水泥、黄沙、石子的重量之比为 1:2:3，现需要这种混凝土 600 公斤，问配料时要水泥、黄沙、石子的重量各多少公斤?

7．有一电动脱粒机，电动机的转速为 1440 转/分，电动机上的主动轮直径为 15 厘米，而要求脱粒机的转速是 600 转/分，问脱粒机上应配一个多大直径的皮带轮?

第三章　三角函数和三角形

第一节　锐角三角函数和直角三角形的解法

一、什么叫锐角三角函数

勾股定理揭示了直角三角形三条边之间的关系，利用它能为我们解决不少实际问题．但是，在三大革命运动中，常常遇到直角三角形的另外一些问题，用勾股定理是不能解决的．"**一切真知都是从直接经验发源的。**"我们从具体问题谈起．

某大队修建抽水站（图 3-1），为了选择适当扬程的水泵，需要知道出水的高度（即扬程）BC 和水平距离 AC．如果测得 AB 长 98 米，山坡对地平面的倾斜角是 $18°$，怎样求出 BC 和 AC？

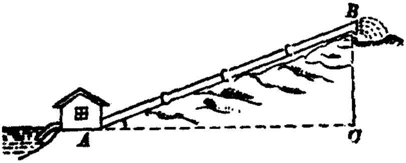


图　3-1

这个例子就是：在直角三角形 ABC 中，已知斜边 AB 和一个锐角 $\angle A$，要求 $\angle A$ 的对边 BC 和邻边 AC．为了解决这类问题，我们必须进一步考察直角三角形边、角之间的数量关系．

"**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。**"我们先看两个特殊

直角三角形的边、角关系.

三角尺是一个直角三角形．它有一个锐角为45°，那么另一个锐角必定也是45°．我们如果去量具有45°角的三角尺的边(图3-2)，可以发现，不论它们的边长如何，两条直角边总是相等的．这样的三角形叫做等腰直角三角形．如果用 a 表示直角边 AC 和 BC 的长，那么斜边长

$$AB=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2}\,a,$$

而
$$\frac{BC}{AB}=\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

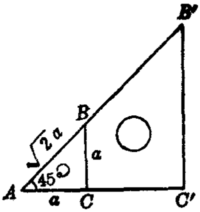


图 3-2

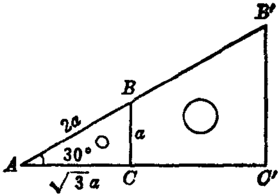


图 3-3

这个关系式对45°的角 A 来说，就是

$$\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

同样有
$$\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

当然也有
$$\frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}}=\frac{a}{a}=1.$$

再看一些具有30°的锐角的三角尺(图3-3)．通过实际度量容易发现，不论它们的边长如何，30°角的对边总是斜边的一半．如果30°角对边 BC 的长为 a，那么斜边 AB 的长就是 $2a$，而30°角的邻边 AC 长为

$$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3}\,a.$$

因此，具有 30° 锐角的直角三角形可以有大有小，而它们的每两边的比也分别等于一个确定的值：

$$\frac{30^\circ\text{角的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{30^\circ\text{角的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\frac{30^\circ\text{角的对边}}{30^\circ\text{角的邻边}}=\frac{a}{\sqrt{3}\,a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

总起来说，在具有 45° 锐角或是 30° 锐角的直角三角形中，每两边的比都同边的长短无关.

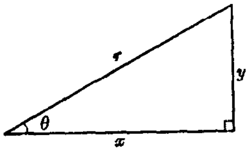


图 3-4

"普遍性即存在于特殊性之中". 一般说来，在直角三角形中，如果一个锐角的大小确定了，**那就**不论它的边长怎样变化，每两边的比都各是一个定值.

根据上面的这一关系，在图 3-4 所示的直角三角形中，θ 是锐角，我们把

角 θ 的对边和斜边的比，叫做 θ 的正弦，记做 $\sin\theta$（读做"赛因 θ"），即

$$\sin\theta=\frac{\theta\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{y}{r};$$

角 θ 的邻边和斜边的比，叫做 θ 的余弦，记做 $\cos\theta$（读做"可赛因 θ"），即

$$\cos\theta=\frac{\theta\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{x}{r};$$

角 θ 的对边和邻边的比，叫做 θ 的正切，记做 $\operatorname{tg}\theta$（读做"坦今特 θ"），即

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\theta\text{ 的对边}}{\theta\text{ 的邻边}}=\frac{y}{x};$$

角 θ 的邻边和对边的比，叫做 θ 的余切，记做 $\operatorname{ctg}\theta$(读做"可坦今特 θ")，即

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{\theta\text{ 的邻边}}{\theta\text{ 的对边}}=\frac{x}{y}.$$

我们把锐角 θ 的正弦、余弦、正切、余切都叫做锐角 θ 的三角函数.

此外，还有两个用得比较少的三角函数，它们是：

角 θ 的正割，记做

$$\sec\theta=\frac{\text{斜边}}{\theta\text{ 的邻边}}=\frac{r}{x}\quad(\sec\theta\text{ 读做"西肯特 }\theta\text{"}),$$

角 θ 的余割，记做

$$\csc\theta=\frac{\text{斜边}}{\theta\text{ 的对边}}=\frac{r}{y}\quad(\csc\theta\text{ 读做"可西肯特 }\theta\text{"}).$$

由前面讲到的，含有 45° 锐角和含有 30° 锐角的直角三角形，依据三角函数的概念，立即得到

$$\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \operatorname{tg}45^\circ=1,\quad \operatorname{ctg}45^\circ=1.$$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2},\quad \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad \operatorname{tg}30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{ctg}30^\circ=\sqrt{3}.$$

在一个直角三角形内(图3-5)，一个锐角的对边，就是另一个锐角的邻边. 因此，

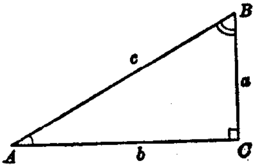


图 3-5

$$\sin B^*=\frac{\text{对边 }b}{\text{斜边 }c},\text{ 而 }\cos A=\frac{\text{邻边 }b}{\text{斜边 }c},$$

* 一般我们用大写的 A, B, C 表示三角形的三个角；用小写的 a, b, c 表示三个角所对的边.

$$\therefore\quad \sin B=\cos A.$$

同理可得

$$\cos B=\frac{a}{c}=\sin A,\quad \operatorname{tg} B=\frac{b}{a}=\operatorname{ctg} A,\quad \operatorname{ctg} B=\frac{a}{b}=\operatorname{tg} A.$$

直角三角形两锐角之和为 90°(两角之和等于 90°，就称这两角互为余角)，即 $B=90°-A$. 代入上式，就有

$$\sin(90°-A)=\cos A;$$

$$\cos(90°-A)=\sin A;$$

$$\operatorname{tg}(90°-A)=\operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg}(90°-A)=\operatorname{tg} A.$$

正弦和余弦，正切和余切分别叫做互为余函数. 把这四个等式归结成一句话，就是：一个锐角的三角函数值，等于它的余角的余函数值.

【例 1】 求 60° 角的三角函数值.

解：$\sin 60°=\sin(90°-30°)=\cos 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2};$

$$\cos 60°=\cos(90°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60°=\operatorname{tg}(90°-30°)=\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60°=\operatorname{ctg}(90°-30°)=\operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【例 2】 求 $\sin^2 45°+\operatorname{ctg}^2 60°$ 的值.

这里 $\sin^2 45°$ 是 $(\sin 45°)^2$ 的简写，类似地也把 $(\sin\theta)^2$ 写成 $\sin^2\theta$，$(\operatorname{ctg}\theta)^3$ 写成 $\operatorname{ctg}^3\theta$，等等.

解：$\sin^2 45°+\operatorname{ctg}^2 60°=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}.$$

【例3】 在直角三角形 ABC 中(图3-6), $\angle C=90°$, $\angle A=45°$, $c=65$. 求 a.

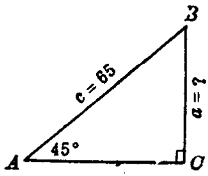


图 3-6

解: $\because \quad \sin A=\dfrac{a}{c}$,

$$\begin{aligned}\therefore \quad a&=c\sin A\\&=65\times\sin 45°\\&=65\times\frac{\sqrt{2}}{2}=65\times 0.707=46.\end{aligned}$$

在解决实际问题中，不仅要用到30°, 45°, 60°这些角的三角函数值，而且要涉及到任意锐角的三角函数值. 已知一个锐角，它的某个三角函数的值是什么？反过来，已知一个三角函数值，和它相应的锐角是多大？人们根据实际的需要，早已制成了"三角函数表"，可以很方便地解决这两个问题. "三角函数表"和它的查法，都附在本书后面，这里不再叙述.

引进了锐角三角函数，并学会了三角函数值的查表方法后，就可以解决本节一开始提出的问题了.

在图3-1中，已知 $AB=98\,\text{m}$, $\angle A=18°$, 要求 $\angle A$ 的对边 BC 和邻边 AC. 由 $\sin A=\dfrac{BC}{AB}$, 得到

$$BC=AB\sin A=98\cdot\sin 18°.$$

查表，得

$$\sin 18°=0.3090,$$

$$\therefore \quad BC=98\times 0.3090\approx 30.28(\text{m}).$$

又由

$$\cos A=\frac{AC}{AB},$$

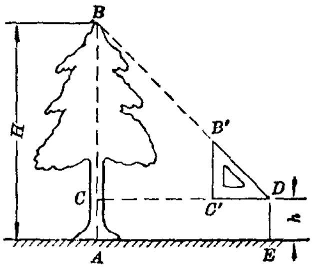
得到

$$AC = AB\cos A = 98\cdot\cos 18^\circ$$
$$= 98\times 0.9511 \approx 93.21(\text{m}).$$

即出水口的高度是 30.28 米，水平距离是 93.21 米.

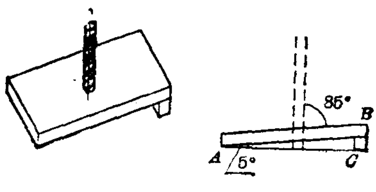
练习

1. 在精确度要求不高的情况下，可以利用一块 45° 的三角尺来草测物体的高. 例如，为了测量一棵大树的高度 H，先使三角尺的一条直角边 $C'B'$ 和树干 AB 平行，另一条直角边 $C'D$ 和地面平行（如图）. 眼睛沿着斜边 DB' 瞄准，并移动身体，使瞄准点恰好对准树顶 B. 再量一量立足点 E 到树的距离 AE. 如已知测量者眼睛的高度是 h，那就可以约略地知道树的高度 $H = AE + h$. 为什么？



（第 1 题）

2. 在直角三角形 ABC 中，两条直角边 $a=3$，$b=4$. 求 a 边的对角 $\angle A$ 的三角函数值.
3. 求 $2\sin 30^\circ + 3\cos 60^\circ + \text{tg}\,45^\circ$ 的值.
4. 在直角三角形 ABC 中，$\angle C = 90^\circ$，$\angle B = 60^\circ$，$\angle B$ 的对边 $b = 100\sqrt{3}$. 求 $\angle A$ 和其他两边 a, c.
5. 某车间接受一批生产任务，要求在钢板上打出 85° 的斜孔，钻床只能垂直钻下. 具有实践经验的老师傅，把钢板的一头垫高，使它倾



（第 5 题）

斜 5°，就能钻出 85° 的斜孔．如果垫块与支撑点 A 的距离是 300 毫米，问垫块应取多高？

[2. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos A=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} A=\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg} A=\frac{4}{3}$. 3. $3\frac{1}{2}$.
4. $\angle A=30°$, $a=100$, $c=200$. 5. 26.25 毫米.]

二、解直角三角形和农村应用举例

直角三角形有三条边和三个角，共有六个元素，其中一个角为直角是确定的．对于直角三角形，在已知两个元素（其中至少有一条边）的条件下，应用已学过的知识（包括勾股定理在内），就可以由已知的元素求出未知的元素，这种计算过程叫做解直角三角形．

随着农业机械化、电气化、水利化的发展，解直角三角形在农村中的应用也愈来愈多，我们来看下面的例子．

1．坡比计算　在设计河道、筑渠、筑坝时，经常会遇到计算坡比的问题．

假设斜坡的坡面部分的高度是 h，坡面的水平宽度是 L（图 3-7），那么，h 与 L 的比值就叫做坡比（也叫做坡度），用 i 表示，就是

$$i=\frac{h}{L}.$$

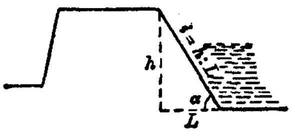


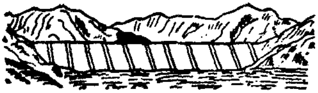
图 3-7

坡比通常写成 $1:m$ 的形式，如 $i=1:3$ 等．

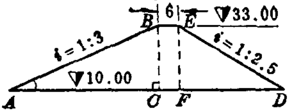
如果把坡面与水平面的夹角记为 α（叫做倾斜角），那么有

$$i=\frac{h}{L}=\operatorname{tg}\alpha.$$

【例 4】 图 3-8(1) 是某个水库大坝，(2) 是大坝的横断



(1)



(2)

图 3-8

面．坝址地面高程*是 10 米，坝顶高程是 33 米，迎水坡坡比 $i=1:3$．求迎水坡坡面 AB 的长．

解：在直角三角形 ACB 中，

$$BC=33-10=23.$$

因为迎水坡坡比 $i=1:3$，就是

$$\operatorname{tg} A=\frac{1}{3}\approx 0.3333,$$

查表得

$$A=18^\circ 26'.$$

再从

$$\sin A=\frac{BC}{AB},$$

得到

$$AB=\frac{BC}{\sin A}=\frac{23}{\sin 18^\circ 26'}=\frac{23}{0.3162}\approx 72.74(\mathrm{m}).$$

即迎水坡坡面 AB 的长是 72.74 米．

在地形图上常用等高线反映地面上高低起伏的自然面貌．等高线是连接地面上高程相同的相邻各点所成的封闭曲线．等高线的疏、密，显示出地形的平、陡．等高线上所标的数字，表示该线上地面各点的实际高程．

利用坡比，可以从画有等高线的地图上，计算两地间坡面的倾斜角．

---

* 地面某点对于某一个水平面的高度叫做该点的高程，图上一般用▽表示．有关高程的内容，将在第四章内详细介绍．

【例 5】 如图 3-9，A 地的高程是 100 米，B 地的高程是 200 米，如果 A，B 两地在 1:15000 的图上的距离是 15 毫米，试求由 A 到 B 的斜坡的倾斜角和 A，B 两地的坡面距离.

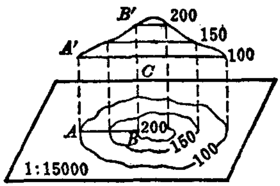


图 3-9

解：为便于直观，我们作出过 A，B 两点的纵断面图（图 3-9 的上半部分），并记 A，B 两地的对应点为 A'，B'.

A，B 两地的高程之差是

$$CB'=200-100=100(\mathrm{m}).$$

因为地形图上的比例尺是 1:15000，所以 A，B 两地的水平距离是

$$A'C=\frac{15\times15000}{1000}=225(\mathrm{m}).$$

在直角三角形 $A'CB'$ 中，$A'B'$ 的坡比是

$$\operatorname{tg}A'=\frac{CB'}{A'C}=\frac{100}{225}\approx0.4444,$$

查表，得倾斜角

$$\angle A'=23°58'.$$

所以，A，B 的坡面距离

$$A'B'=\sqrt{A'C^2+CB'^2}=\sqrt{225^2+100^2}\approx246(\mathrm{m}).$$

即由 A 到 B 的斜坡的倾斜角为 $23°58'$，A，B 两地的坡面距离是 246 米.

2．农机加工计算

【例 6】“东风-2 型”插秧机中的一个手柄如图 3-10 所示．在制造时，需要知道手柄扳转的角度 $\angle BAC$，求这个角.

解：$\because\quad \cos\angle BAC=\frac{AC}{AB}=\frac{460}{512}\approx 0.8984,$

$\therefore\quad \angle BAC=26^\circ 3'.$

*

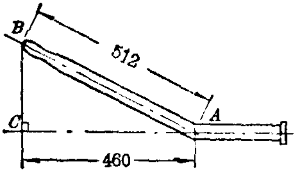


图 3-10

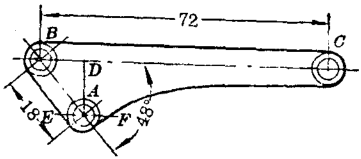


图 3-11

【例 7】 脱粒机上有一个叫做摇杆的部件(图 3-11). 在制造这个部件时，确定了 B, C 两孔的位置后，用什么方法找出 A 孔的位置，使 $\angle ABC=48^\circ$, 而 $AB=18\,\text{mm}$?

解：假定 A 孔位置已经确定，在图 3-11 中，由 A 作 BC 的垂线 AD. 在直角三角形 ABD 中，$AB=18\,\text{mm}$, $\angle ABD=48^\circ$. 由 $\sin\angle ABD=\frac{AD}{AB}$, 可得

$$AD=AB\sin\angle ABD=18\cdot\sin 48^\circ$$
$$=18\times 0.7431\approx 13.4\,(\text{mm}).$$

就是说，A 孔离 BC 直线为 13.4 毫米，离 B 孔为 18 毫米. 工人老师傅根据这两个距离，按如下步骤定出 A 孔位置：

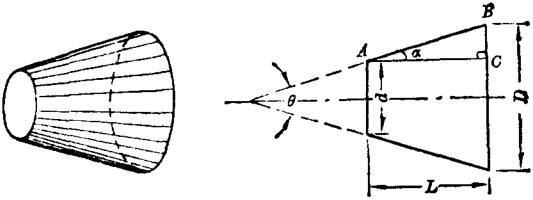
先把零件搁在平台上，使两孔中心 B, C 的连线在水平位置上. 然后在离 BC 13.4 毫米处，用划针盘划一条直线 $EF\parallel BC$. 再以点 B 为圆心，18 毫米为半径，用矩叉（即圆规）作弧与 EF 相交，所得的交点就是 A 孔的中心.

在机械制造上，常应用圆台形或圆锥形工件，如车床、铣床、磨床的主轴孔，前后顶针等. 这种工件叫圆锥工件〔也叫

* 图纸上所标尺寸不注明单位时，一般为毫米.

退拔，图 3-12(1)]．一般圆锥工件的主视图* 是一个梯形，如图 3-12(2)，并且它的二条不平行的边是相等的，这种梯形叫做等腰梯形．在图 3-12(2) 中，圆锥工件的大头直径 D 和小头直径 d 的差，与它的长度 L 的比值叫做锥度，用 K 表示，即

$$K=\frac{D-d}{L}.$$



(1) (2)

图 3-12

两腰所在直线的夹角 θ 叫锥角．引 AC 平行于轴线，设 $\angle BAC$ 为 α，α 叫斜角，显然 $\alpha=\frac{\theta}{2}$．在直角三角形 ACB 中，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{D-d}{2}}{L}=\frac{D-d}{2L}=\frac{K}{2}.$$

锥度 K 在图纸上一般写成比的形式，例如 $K=1:7$．在车床上车削圆锥工件时，一般先要根据图纸上标出的锥度求出 α，然后转动小拖板，使转动角度等于 α，再进行车削（图 3-13）．

【例 8】 图 3-14 表示柴油机上装飞轮的圆锥工件．试依

* 在机械制图的图纸上，表示一个机械零件，一般只要画出零件的正面、顶面、侧面的三个投影图就可以了，它们分别叫做主视图、俯视图、左视图。

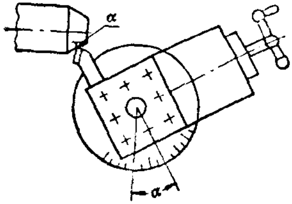


图 3-13

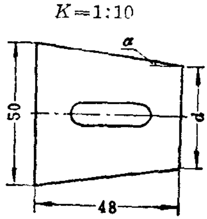


图 3-14

据图示尺寸，计算车削该工件时小拖板应转动的角度 α 以及小头直径 d.

$$解:\because \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{K}{2}=\frac{\frac{1}{10}}{2}=0.05,$$

$$\therefore \quad \alpha=2°52'.$$

$$又 \quad \because \quad K=\frac{D-d}{L},$$

$$\therefore \quad d=D-KL=50-\frac{1}{10}\times 48$$

$$=45.2(mm).$$

即车削该工件时，小拖板应转动2°52′，小头直径是45.2毫米.

3．测距计算

【例 9】 贫下中农在开发山区，建造梯田时，为了确定梯田的田面宽度和田埂高度，需要测出山地斜坡上两点间的水平距离．已知山顶 B 的高程是 220 米，山脚 A 的高程是 174

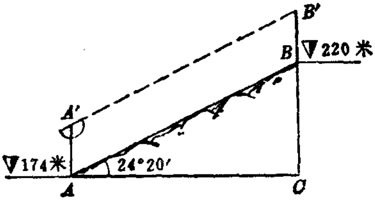


图 3-15

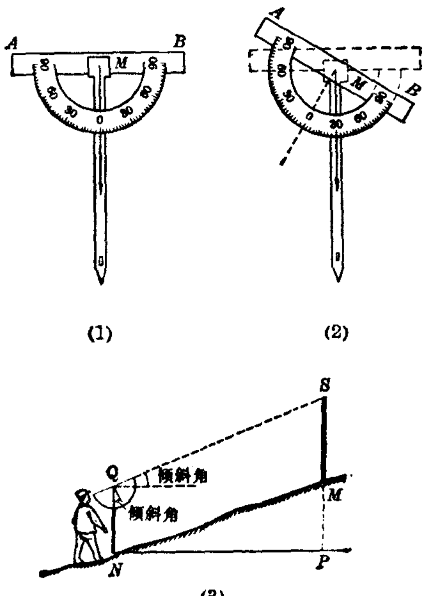
米．并用倾角器*测得山坡的倾斜角为 $24°20'$．试求出 A, B 两点间的水平距离 AC (图 3-15)．

解：因为 A, B 两点高程的差 $BC=220-174=46(\mathrm{m})$, $\angle BAC=24°20'$, 所以 A, B 两点的水平距离

$$AC=BC\operatorname{ctg}\angle BAC=46\cdot\operatorname{ctg}24°20'$$
$$=46\times2.212=102(\mathrm{m}).$$

---

* 倾角器是专门测量仰角(仰望高处物体的视线，与水平视线的夹角)的，它的构造如附图(1)所示．使用时，将倾角器垂直插在测点处，使重锤线与度盘的 0° 刻度线重合，即度盘的顶线 AB 成水平．当顶线 AB 对准目的物时，重锤线在刻度上所指的度数即为仰角[附图(2)]．在具体测量时，可在山顶 M 处直立一标杆[附图(3)]，量取 MS 的长等于倾角器的高 QN．在 S 处作一标记，测得点 S 的仰角 α, 即为斜坡 NM 的倾斜角。



(1)　　(2)

(3)

【例 10】 某公社计划修建一条渠道．渠道要通过一座小山，准备从山的两侧同时开凿隧道．为此，在山南面取一点 D，如图 3-16，使 $\angle ABD=140°$，$\angle D=50°$，又量得 $BD=523\,\mathrm{m}$．问在 DE 线上距 D 多远并取什么方向开凿，才能打通隧道使与 AB 段成一直线？

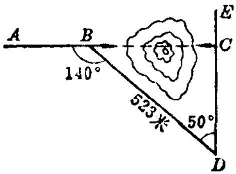


图 3-16

解：假设 AB 的延长线交 DE 于点 C．因为 $\angle ABD=140°$，$\angle D=50°$，所以

$$\angle DCB=140°-50°=90°, (为什么?)$$

即三角形 DCB 是一个直角三角形．又已知 $BD=523\,\mathrm{m}$，于是由 $\cos D=\dfrac{DC}{BD}$，得

$$DC=BD\cos D=523\cdot\cos 50°$$
$$=523\times 0.6428\approx 336.2(\mathrm{m}).$$

即只要在 DE 线上距 D 为 336.2 米的点 C 处，并沿着和 DE 垂直的方向开凿，就能打通隧道，并与 AB 段成一直线．

4．坐标放样计算

【例 11】 在水利建设，修建铁路、公路和造桥等工程中，都需要进行坐标放样．图 3-17 是某个水闸进口处的圆形护土墙的图样．施工前，要根据这个图样的尺寸和要求，在地面上划出它的实样，象这样的过程叫做放样．图中 $R10$ 表示半径为

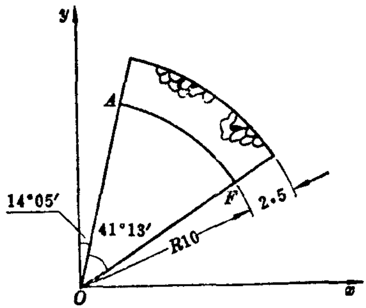


图 3-17

10 米．由于半径较大，很难在地面上划出相应的圆弧，工人同志就用坐标描点法来放样．

先在图纸上以圆弧的圆心 O 为原点，以米为单位，按一定的比例缩小，建立一个直角坐标系．由原点向北作为 y 轴的正向，由原点向东作为 x 轴的正向．在圆弧 AF 上选择如图 3-18 里的 A, B, C, D, E, F 几点，作为控制图形形状的控制点，其中 $\angle AOB=\angle BCC=\angle COD=\angle DOE=10^\circ$．这样，就可以算出这些点的坐标．

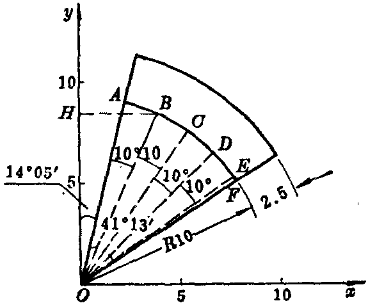


图 3-18

例如，计算点 B 的坐标．

过点 B 作 y 轴的垂线 BH．在直角三角形 HOB 中，$OB=R=10\text{m}$，$\angle HOB=14^\circ05'+10^\circ=24^\circ05'$．因此

$$
\begin{aligned}
x_B=HB=OB\sin\angle HOB&=10\cdot\sin 24^\circ05'\\
&=10\times0.4080\approx4.08(\text{m}),\\
y_B=OH=OB\cos\angle HOB&=10\cdot\cos 24^\circ05'\\
&=10\times0.9129\approx9.13(\text{m}).
\end{aligned}
$$

所以，点 B 的坐标是 $(4.08,\ 9.13)$．

同样，可以求得 A, C, D, E, F 各点的坐标．

再在施工的地面上，按照事先测定并已经打上桩子的原点以及指北方向，建立坐标系．根据计算出的一对对坐标值，在地面上定出各个控制点的位置．最后把这些控制点连接成近似的圆弧．于是，图形的放样就完成了．

上面的例题都是通过解一个直角三角形来解决的．有些

稍为复杂的问题，可能涉及到互有联系的两个直角三角形，但基本的方法是相同的.

【例 12】 大海里有一小岛 B，岛的周围 7 浬内有礁石. 渔船跟踪鱼群，由西向东航行(图 3-19). 船在 A 地时，渔民测得小岛在北偏东 $62°30'$；航行了 10 浬到达 D 处时，测得小岛在北偏东 $30°45'$. 如果渔船不改变航行方向，继续捕捞，问有没有触礁的危险？

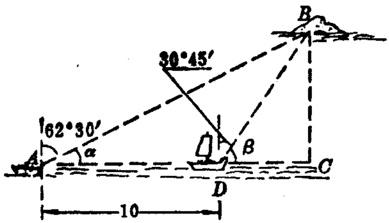


图 3-19

解：由 B 引 AD 的垂线，交 AD 的延长线于 C. 点 C 是船航行途中和小岛最近的一点. 在直角三角形 ABC 中，$AC=BC\operatorname{ctg}\alpha$，而 $AC=AD+DC$，即

$$AD+DC=BC\operatorname{ctg}\alpha.$$

在直角三角形 DBC 中，

$$DC=BC\operatorname{ctg}\beta,$$

$$\therefore \quad AD+BC\operatorname{ctg}\beta=BC\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$BC(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta)=AD,$$

这里，$\alpha=90°-62°30'=27°30'$，$\beta=90°-30°45'=59°15'$，$AD=10$(浬). 所以

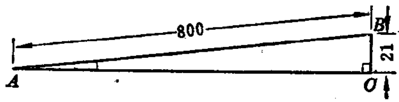
$$BC=\frac{AD}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}=\frac{10}{\operatorname{ctg}27°30'-\operatorname{ctg}59°15'}$$

$$=\frac{10}{1.921-0.5949}\approx 7.5(\text{浬}).$$

因为航线和小岛的最近距离是 7.5 浬，大于 7 浬，所以渔船没有触礁的危险.

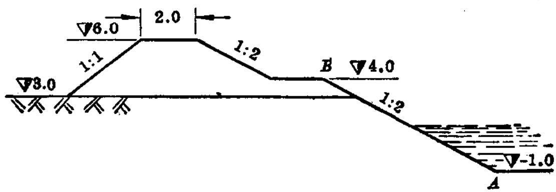
练习

1．某县开凿一条渠道，有一段隧道，长800米，东口比西口高出21米．求它的倾斜角．



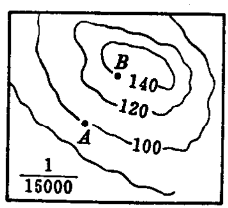
（第1题）

2．参照所附堤岸断面图，计算坡面 AB 的长．



（第2题）

3．求地形图中 A, B 两地坡面的倾斜角和坡面距离（A, B 图上距离为10毫米）．



（第3题）

[1．1°30′．2．11.18米．3．14°56′, 155.2米．]

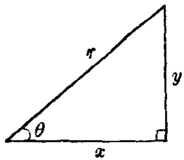
小　结

1．在直角三角形中，如果一个锐角 θ 的大小确定了，那么每两边的比各是一个定值．它们叫做锐角 θ 的三角函数：

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\qquad \cos\theta=\frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{ctg}\theta=\frac{x}{y},$$

$$\sec\theta=\frac{r}{x},\qquad \csc\theta=\frac{r}{y}.$$



2．一个锐角的三角函数值等于它的余角的余函数值：

$$\sin(90^\circ-A)=\cos A,\quad \cos(90^\circ-A)=\sin A,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-A)=\operatorname{ctg}A,\quad \operatorname{ctg}(90^\circ-A)=\operatorname{tg}A.$$

3．30°，45° 和 60° 这些特殊角的三角函数值如下：

三角函数值 θ / 三角函数	30°	45°	60°
$\sin\theta$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg}\theta$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\theta$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

任意锐角的三角函数值可以查表得到.

4．直角三角形的解法：

(1) 已知直角三角形中一锐角和任意一边，可根据两锐角互余关系，求另一锐角，再利用三角函数和勾股定理求其他的边；

(2) 已知直角三角形的任意两边，可根据勾股定理求第三边，再利用三角函数求锐角.

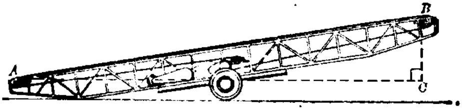
习　　题

1．求值(不查表)：

(1) $(1+\sin 45^\circ+\sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ+\cos 60^\circ)$;

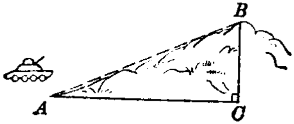
(2) $\operatorname{ctg}60^\circ\cdot\operatorname{tg}45^\circ\cdot\operatorname{tg}60^\circ$.

2. 码头上装卸货物用的皮带输送机每节长 (AB) 为 25 米，皮带和水平线的夹角 $\angle A$ 可以调节. 当 $\angle A$ 最大为 38° 时，求每节输送机能把货物提起的最大高度 BC.



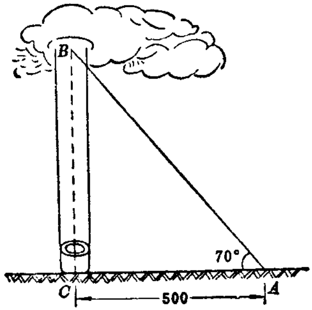
(第 2 题)

3. 我坦克兵进行军事演习时，要通过一座山. 已知山顶 B 和山脚 A 的水平距离和垂直距离分别是 1500 米和 560 米. 如果所用的坦克能爬倾斜角是 30° 的山坡，那么这种坦克能否翻越这座山？



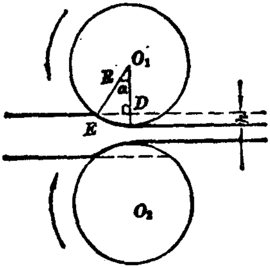
(第 3 题)

4. 云高是气象预报的重要依据. 对于较低的云层，夜间常采用云幕灯法测量云高. 从云幕灯 C 处发射一束光柱，垂直照到云底的点 B，如果在距离云幕灯 C 500 米处的点 A 测得 $\angle CAB$ 为70°，求云高 CB.

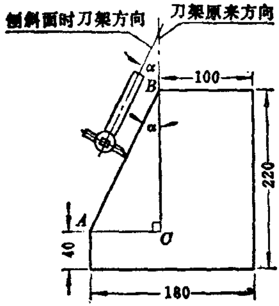


(第 4 题)

5. 当用两根转动的轧辊把钢压薄时，如果两轧辊半径 $R=150\,\text{mm}$，轧辊压下量的一半 $h=3\,\text{mm}$，求咬入角 *α.



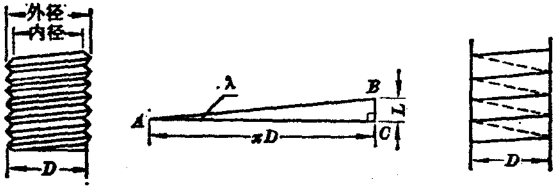
(第 5 题)



(第 6 题)

6. 附图所示是机床上的一个零件，求出该零件在刨床上加工时，刨刀刀架转动的角度 α.

7. 某一公制螺纹的平均直径 $D=22.05\,\text{mm}$，导程 $L=3\,\text{mm}$，求它的螺旋角 λ。

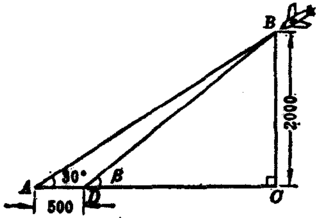


(第 7 题)

提示：把一张纸剪成直角三角形卷在圆柱面上，它的斜边就绕成螺纹. 导程是螺纹旋转一周后，在轴线方向前进或后退的距离；螺旋角是螺纹上升的角度。附图所示的直角三角形 ABC 就是把螺纹一周展开后的图形，其中 $AC=\pi D$，BC 就是导程 L. 很明显，从 $\operatorname{ctg}\lambda=\dfrac{\pi D}{L}$，可以求得角 λ.

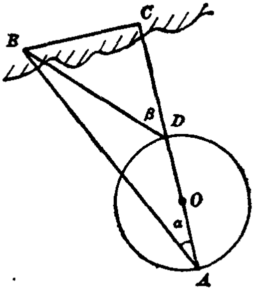
* 轧辊和轧件相接触的一段弧线叫做咬入弧，咬入弧所对的圆心角叫做咬入角。

8. 距地面 2000 米高空的飞机由点 B 下滑，在无风的情况下，将滑到地面上 A 处，下滑角是 30°. 由于受到逆风的影响，实际上飞机下滑到地面上 D 处，下滑的水平距离减少了 500 米. 求飞机受风力影响时的下滑角 β.

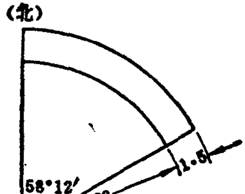


(第 8 题)

9. 船舶回转直径的大小，反映出船舶操纵性能的好坏. 假设两个岸标 B, C 间的距离是 100 米，BC 在点 C 的垂线与船舶回转航线交于 A, D 两点，且通过回转航线的中心 O. 又测得 $\alpha=20°$, $\beta=45°$, 求船舶的回转直径.



(第 9 题)



(第 10 题)

10. 如图是某公社拖拉机路工程的一个弯道. 试说出放样过程；并进行一次实践，用石灰粉在地面上画出它的实样来（单位是米）.

第二节　任意三角形的边角关系和解法

一、任意三角形的边角关系

我们已经知道，对于一个直角三角形，只要知道它的两条边或是一条边和一个锐角，就可以求得其余的边和角．下面我们来讨论任意三角形六个元素之间的关系，从而得到任意三角形的解法．

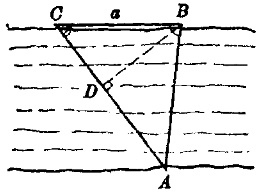
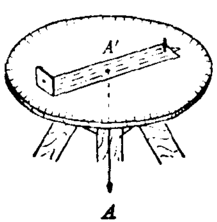
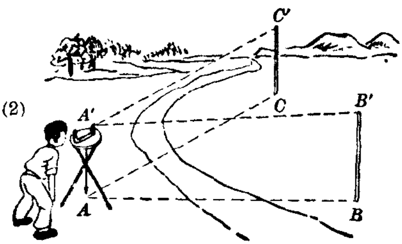


图 3-20

1．正弦定理　上海市城市建设部门为了清洁水源，保障人民健康，对污水进行处理，需要在黄浦江底敷设一条过江管道，把无害污水送到农村用作肥料．敷设过江管道要知道江岸某点 A 到对岸点 B 间的距离 AB（图 3-20）．我们在点 B 所在的岸边另选一点 C，量得基线 $BC=a=521.12\,\text{m}$，并测得 $\angle B=88°1'$，$\angle C=46°43'$*．下面我们来讨论，怎样根据 BC，$\angle B$ 和 $\angle C$

* 在水平面上两条直线间的夹角叫做水平角，水平角可用测角仪[附图(1)]测得．测量时，先把测角仪的中心 A' 处的铅垂线对准测站点 A，使照准仪在水平度盘上的读数为 0，并对准前方点 B 处的标杆．然后旋转照准器（不能触动度盘），使它对准点 C 处的标杆．这时照准器在度盘上所指的度数，就是所要测的水平角$\angle BAC$[附图(2)]．

(1)


(2)


三个数据，求出 AB 来.

上面的问题可以归结为：在任意三角形 ABC 中，已知两个角 $\angle ABC$ 和 $\angle ACB$，以及它们所夹的边 BC，求另一条边 AB.

我们可以将这个三角形分为两个直角三角形，利用直角三角形的解法来解.

过点 B 作 $BD\perp AC$. 在直角三角形 ABD 中，

$$BD=AB\sin A;$$

在直角三角形 BCD 中，

$$BD=BC\sin C.$$

$$\therefore\quad AB\sin A=BC\sin C.$$

我们知道，三角形三内角之和等于 $180°$，因此，

$$\angle A=180°-(88°1'+46°43')=45°16'.$$

于是有

$$AB=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{521.12\times\sin 46°43'}{\sin 45°16'}$$

$$=\frac{521.12\times 0.7280}{0.7104}=534\ (\text{m}).$$

即黄浦江两岸 A, B 间的距离为 534 米.

在图 3-20 的三角形 ABC 中，如果 $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ 的对边分别用 a, b, c 来表示，那么由 $AB\sin A=BC\sin C$ 可得：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

同理可得

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

这个关系式揭示了任意三角形边、角之间的一个重要关

系，即三角形各边和它所对角的正弦的比相等．我们把这个关系叫做正弦定理．

如果$\triangle ABC$中有一个角为钝角（图3-21中的$\angle ABC$），那么自点A引CB的垂线，交CB的延长线于D．于是在直角三角形ABD中，$\angle ABD=180°-\angle B$．因为$\angle B>90°$，所以$\angle ABD$为锐角．

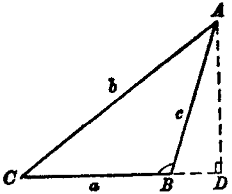


图 3-21

$$AD=c\sin(180°-B).$$

在直角三角形ACD中，

$$AD=b\sin C.$$

所以

$$b\sin C=c\sin(180°-B).$$

即
$$\frac{b}{\sin(180°-B)}=\frac{c}{\sin C}.$$

同时有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

所以
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin(180°-B)}=\frac{c}{\sin C}.$$

在第五章中将会说明，$\sin(180°-B)=\sin B$．这样，对于钝角三角形导出的公式就与锐角三角形的公式一致了．

从正弦定理的关系式不难知道，在一般三角形中，知道了两边及一个对角，或知道了两角及一条对边，就可以利用正弦定理求出其他的边和角．

2．*余弦定理*　红旗大队在“农业学大寨”的运动中，发动群众劈山引水，修建水渠．为了工程的需要，要计算一个隧洞的长．测量人员在山侧平地上选取一点A（图3-22），从A处测得$AB=480\,\text{m}$，$AC=630\,\text{m}$，$\angle A=57°36'$，我们来求隧道BC的长．

作 $BD\perp AC$. 在直角三角形 ABD 和 BCD 中,

$$BC^2=BD^2+CD^2,$$

$$BD^2=AB^2-AD^2.$$

又 $$CD=AC-AD,$$

$$AD=AB\cos A.$$

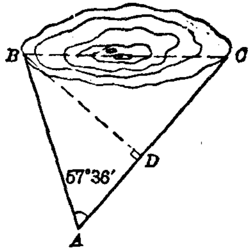


图 3-22

将第二、三两式代入第一式, 得

$$\begin{aligned}BC^2&=AB^2-AD^2+(AC-AD)^2\\&=AB^2-AD^2+AC^2\\&\quad-2\cdot AC\cdot AD+AD^2\\&=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A.\end{aligned}$$

将 $AB=480$, $AC=630$, $\angle A=57°36'$ 代入上式, 得

$$\begin{aligned}BC^2&=480^2+630^2-2\times480\times630\times\cos57°36'\\&=230400+396900-604800\times0.5358\\&=303248.16.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad BC=\sqrt{303248.16}\approx551(\text{m}).$$

在 $\triangle ABC$ 中, 如果用 a, b, c 分别表示 $\angle A$, $\angle B$ 和 $\angle C$ 所对的边, 那么上面 $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$ 可写成

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A. \tag{1}$$

用同样的方法可以求得

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B, \tag{2}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C. \tag{3}$$

(1), (2), (3) 三个关系式, 揭示了三角形边、角之间的另一个重要关系, 即三角形一边的平方, 等于其余两边的平方和, 再减去它们与其夹角余弦乘积的两倍. 这个关系叫做余弦定理.

如果 $\triangle ABC$ 中有一角为钝角 (图 3-23 中的 $\angle A$), 那么

过点 B 引 AC 的垂线 BD,

$$\because \quad a^2=BD^2+CD^2,$$

这里 $BD^2=c^2-AD^2$, $CD=b+AD$, 而 $AD=c\cos(180^\circ-A)$,

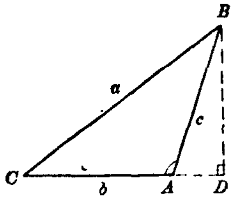


图 3-23

$$\begin{aligned}\therefore \quad a^2&=c^2-AD^2+(b+AD)^2\\&=c^2-AD^2+b^2+2b\cdot AD\\&\quad+AD^2\\&=b^2+c^2\\&\quad+2bc\cos(180^\circ-A).\end{aligned}$$

即

$$a^2=b^2+c^2+2bc\cos(180^\circ-A).$$

今后在第五章中会知道, $\cos(180^\circ-A)=-\cos A$, 这样,对于钝角三角形,导出的公式与锐角三角形的公式是一致的.

因此,在一般三角形中,知道了两边一夹角,或知道了三边,就可以利用余弦定理来求出其他的边和角.

二、解任意三角形和应用举例

在解任意三角形时,如果我们知道了下面四种情形中的一种:

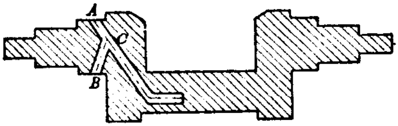
1. 已知两角和一边;
2. 已知两边和其中一边的对角;
3. 已知两边和它们的夹角;
4. 已知三边,

那么我们就可以用正弦定理来解决第一、第二两类的问题,而用余弦定理来解决第三、第四两类的问题.

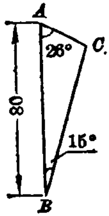
下面我们举一些三角形解法的实际应用例子.

【例1】 图 3-24(1) 是 1105 柴油机曲轴的剖视图, AC

和 BC 都是油槽，$\angle BAC=26^\circ$，$\angle CBA=15^\circ$，$AB=80\,\text{mm}$. 在加工油槽 BC 时，为了不致把油槽 AC 打穿，需要计算 BC 的长. 试求出 BC 来.



(1)



(2)

图 3-24

解：这就是在 $\triangle ABC$ 中，已知两角和一边，求另一边的问题[参看图 3-24(2)].

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\angle C=180^\circ-(\angle A+\angle B)$$
$$=180^\circ-(26^\circ+15^\circ)=139^\circ.$$

根据正弦定理(这里 $\angle C$ 是钝角)

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin(180^\circ-C)},$$

$$\therefore\quad BC=\frac{AB\sin A}{\sin(180^\circ-C)}=\frac{80\sin 26^\circ}{\sin(180^\circ-139^\circ)}$$
$$=\frac{80\sin 26^\circ}{\sin 41^\circ}=\frac{80\times 0.4384}{0.6561}\approx 53.5(\text{mm}).$$

即油槽 BC 的深度是 53.5 毫米.

【例 2】 在一次民兵训练中，"敌"坦克以每秒 17 米的速度沿公路 AC 逃窜(图 3-25)，我火炮在 B 处向"敌"坦克射击. 因坦克在高速行驶，所以火炮必须提前一个角度才能命中. 已知 $\angle BAC=60^\circ$，炮弹的速度为每秒 400 米，求提前角 $\angle ABC$.

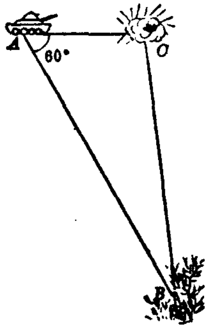


图 3-25

解：设开炮后炮弹经过 t 秒击中坦克，那么

$$AC=17t,$$
$$BC=400t.$$

又已知 $\angle BAC=60^\circ$.

这个问题可以看成是：在 $\triangle ABC$ 中，已知两条边 AC, BC 和其中一边的对角 $\angle BAC$，求另一边的对角 $\angle ABC$.

由正弦定理，并且根据题意，$\angle ABC$ 是锐角，所以有

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC},$$

因此，

$$\sin\angle ABC=\frac{AC}{BC}\sin\angle BAC=\frac{17t}{400t}\sin 60^\circ$$
$$=\frac{17}{400}\times 0.8660\approx 0.0368.$$

所以

$$\angle ABC=2^\circ 7'.$$

即火炮的提前角应该是 $2^\circ 7'$.

【例 3】 红旗拖拉机厂工人为了更好地为农业生产服务，经常深入田头和贫下中农一起改进拖拉机的结构. 如图 3-26 所示是他们改进的一个零件. 加工后，要检验 A, B 两孔中心间的距离. 试根据图上尺寸(单位：毫米)，计算孔距 AB.

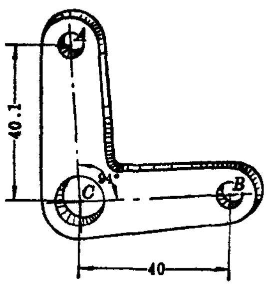


图 3-26

解：在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB$ 是钝角，应用余弦定理得

$$AB^2=40^2+40.1^2+2\times40\times40.1\cos(180^\circ-94^\circ)$$
$$=40^2+40.1^2+2\times40\times40.1\cos86^\circ$$
$$=1600+1608+3208\times0.0698$$
$$\approx3432.$$
$$\therefore\quad AB=\sqrt{3432}\approx58.6(\mathrm{mm}).$$

即 A, B 两孔的中心间的距离应该是58.6毫米.

【例 4】 某渔船在一次航行中不幸遇险，发出呼救信号．人民海军舰艇从 A 处前往营救(图 3-27)．测得渔船在舰艇的北偏东 45° 的方向距 A 为 10 浬的 C 处,并正在沿着南偏东 75° 的方向，以每小时 9 浬的速度向一个小岛靠拢．如果要求舰艇在 40 分钟内靠近渔船,试计算舰艇的航行速度和航行方向.

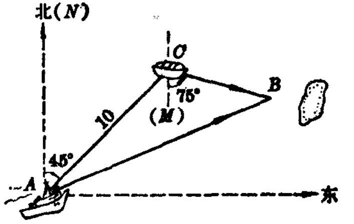


图 3-27

解：设 40 分钟后舰艇在 B 处靠拢渔船，那么这时渔船已沿着 CB 方向走了

$$CB=9\times\frac{40}{60}=6\ (\text{浬}).$$

我们先来求出 A, B 间的距离．在 $\triangle ABC$ 中,已知 $AC=10$, $CB=6$, 而

$$\angle ACB=75^\circ+45^\circ=120^\circ.$$

(这里 $\angle ACM=\angle NAC$, 内错角相等.)

于是 $AB^2=AC^2+CB^2+2\cdot AC\cdot CB\cos(180^\circ-\angle ACB)$
$$=10^2+6^2+2\times10\times6\cos(180^\circ-120^\circ)$$
$$=100+36+2\times10\times6\cos60^\circ=196.$$

$$\therefore \quad AB=14(\text{浬}).$$

即 40 分钟应航行 14 浬，那么每小时船速是

$$\frac{AB}{t}=14\div\frac{40}{60}=14\div\frac{2}{3}=21(\text{浬/时}).$$

现在来求航行方向，即求出 $\angle NAB$. 为此，先求出 $\angle CAB$. 在 $\triangle ABC$ 中，

$$\because \quad \frac{CB}{\sin\angle CAB}=\frac{AB}{\sin(180^\circ-\angle ACB)}$$

$$\therefore \quad \sin\angle CAB=\frac{CB\sin(180^\circ-\angle ACB)}{AB}$$

$$=\frac{6\sin 60^\circ}{14}$$

$$=\frac{6\times 0.8660}{14}\approx 0.3711,$$

即

$$\angle CAB=21^\circ 47',$$

而

$$\angle NAB=45^\circ+21^\circ 47'=66^\circ 47'.$$

所以舰艇应沿着北偏东 $66^\circ 47'$ 的方向，以每小时 21 浬的速度前往营救.

【例 5】 前面我们知道，堤坝坡面与水平面的夹角，叫做倾斜角. 为了求出倾斜角，我们可以用一根竹竿斜靠在坝旁（图 3-28），量得竹竿长 $AB=3.5\,\text{m}$，竹竿底端离坝脚 $BC=1.2\,\text{m}$，竹竿顶端离坝脚 $AC=2.8\,\text{m}$. 试求倾斜角 α.

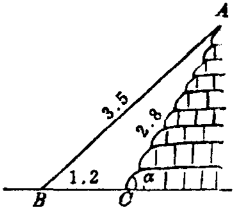


图 3-28

解：因为 $\alpha=180^\circ-\angle ACB$，所以问题可以归结为：已知 $\triangle ABC$ 的三边，求 AB 边的对角.

因为 $\angle ACB$ 是钝角，所以由余弦定理，

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \cdot BC\cos(180° - \angle ACB)$$

得

$$\cos(180° - \angle ACB) = \frac{AB^2 - AC^2 - BC^2}{2AC \cdot BC}$$

$$= \frac{3.5^2 - 2.8^2 - 1.2^2}{2 \times 2.8 \times 1.2}$$

$$= 0.4420.$$

即

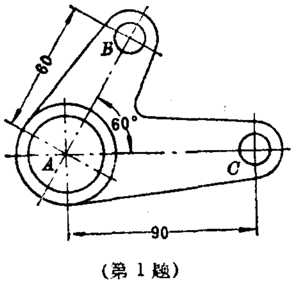
$$180° - \angle ACB = 63°46'.$$

因此

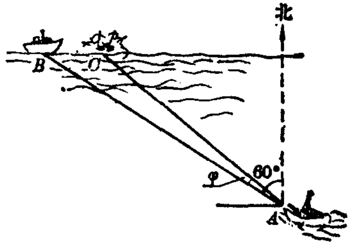
$$\alpha = 180° - \angle ACB = 63°46'.$$

练习

1. 如图是插秧机上的一个零件，叫做拐臂. 已知 $AB = 60\,\text{mm}$, $AC = 90\,\text{mm}$, $\angle CAB = 60°$，为了检验方便，求出 B, C 两孔中心之间的距离.



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 在一次军民联合的军事演习中，发现窜扰我沿海地区的"敌"舰在我鱼雷艇北偏西 60° 的方向，正由西向东以 6 米/秒的速度逃跑. 我鱼雷艇当即发射鱼雷. 已知鱼雷发射后的潜水速度为 300 米/秒，发射鱼雷的提前角 φ 应为多少，鱼雷才能击中"敌"舰?

[1. 79.37 毫米. 2. 34'.]

小　　结

1. 任意三角形的边角关系

正弦定理: $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

余弦定理: $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$;

$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$;

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

2. 任意三角形的解法:

对于下列两种情况,应用正弦定理求解:

(1) 已知两角及任何一边,求其他两边;

(2) 已知两边及其中一边的对角,求其他的边和角.

对于下列两种情况,应用余弦定理求解:

(1) 已知两边及其夹角,求另一边;

(2) 已知三边求角.

习　　题

1. 解三角形:

(1) $\angle B=60°$, $\angle C=70°$, $a=20$;

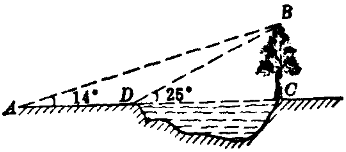
(2) $\angle A=21°30'$, $a=8.4$, $b=4.85$;

(3) $\angle C=120°$, $a=\sqrt{3}-1$, $b=2$;

(4) $a=1$, $b=\sqrt{3}$, $c=2$.

2. 设 A, B 为我方两阵地,相距 1000 米, C 为"敌"阵地. 在 A, B 分别测得 $\angle CAB=62°30'$, $\angle CBA=72°15'$. 问我方两阵地各距"敌"阵地多远?

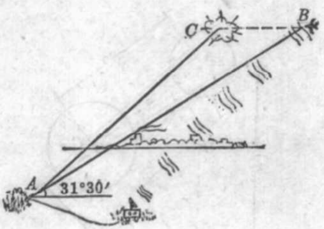
3. 胜利公社为了适应农业机械化的需要,计划在胜利河上建造一座



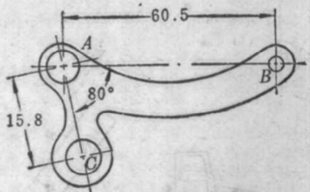
(第 3 题)

拖拉机桥，因此要测量河宽 CD．他们在河的一边沿 CD 方向取 $DA=46$ 米，又由点 A 和点 D 分别测得对岸树顶 B 的仰角是 $14°$ 和 $25°$，求河宽 CD．

4．敌机以每秒 300 米的速度窜犯我高炮阵地．当雷达测得高炮到敌机的仰角是 $31°30'$ 时，立即开炮射击．已知炮弹平均速度为每秒 800 米，求提前角 $\angle BAC$．



（第 4 题）

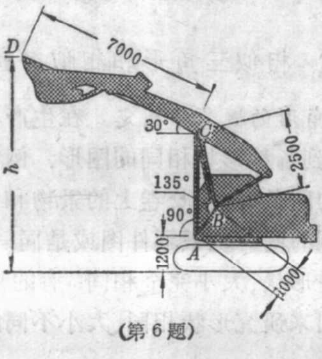


（第 5 题）

5．在加工家用缝纫机上的挑线杆时，需要计算 B，C 两孔的中心距．已知 $AB=60.5\,\mathrm{mm}$，$AC=15.8\,\mathrm{mm}$，$\angle CAB=80°$．求 BC 的长．

6．如图所示是一种挖掘机．它的铲斗主要靠在支点 A 处的油泵顶起而进行挖掘．

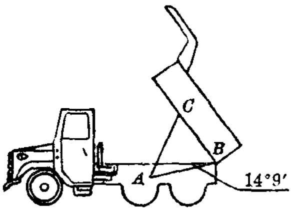
(1) 已知 A，B 两支点相距 1000 毫米，撑杆 BC 长 2500 毫米，撑杆 BC 与两支点连线 AB 的最大夹角是 $135°$，求顶杆 AC 的最大长度．



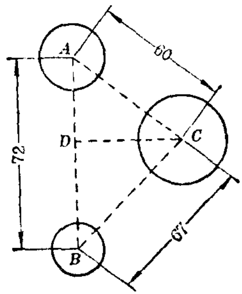
（第 6 题）

(2) 如果支点 A 离地面 1200 毫米，当顶杆 AC 伸得最长时，AC 正好与地面垂直，这时铲斗臂 CD 与地面的倾角是 $30°$，又铲斗臂 CD 长 7000 毫米，求这种挖掘机的最大挖掘高度 h.

7. 倾卸车在卸货时，油泵顶杆 AC 最长为 2.7 米，油泵端点 A 与支点 B 的连线长 2.6 米，并且 AB 与水平线的夹角是 $14°9'$，两支点 B，C 间的距离是 1.9 米，求货斗与地面所成的最大角度.



（第 7 题）



（第 8 题）

8. 镗工师傅用镗床加工 A, B, C 三孔，在顺次镗好 A 孔和 B 孔后，要把镗杆从 B 退回到 D，再从 D 向右移动拖板使镗杆对准 C，才能镗 C 孔. 求 BD 和 DC.

第三节　相似三角形及其应用

一、相似三角形和相似多边形

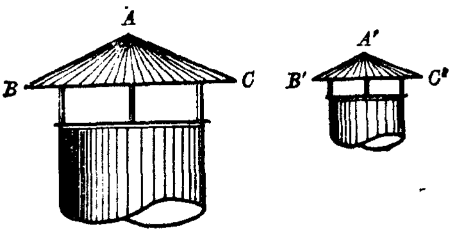
1. 相似三角形的概念和判定　在生产斗争和日常生活中，我们经常看到各种形状相同的图形. 例如，照象底片上的图象和相片上的图象，电影胶卷上的景物和银幕上的景物，用不同比例尺绘制的同一机械零件图或是同一地区的地图，等等. 它们有的是形状、大小完全相同，有的是形状相同、大小不同. 下面我们来研究形状相同、大小不同的图形.

图 3-29 是同一个烟囱风帽的主视图. (1) 是按照 1:10 (2)是按照 1:20 的比例画的. 我们来考察两个三角形 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$. 经过度量可以发现,图形经过放大或缩小后,各角的大小保持不变,即

$$\angle A=\angle A', \quad \angle B=\angle B', \quad \angle C=\angle C'.$$

由于图是分别按 1:10 和 1:20 绘制的, 所以它们对应边的比为 $\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{20}}=2$, 即

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}.$$



(1)
比例 1:10

(2)
比例 1:20

图 3-29

在两个三角形中, 如果它们的对应角相等, 对应边成比例, 就称这两个三角形为相似三角形. 对应边的比叫做两个三角形的相似比. $\triangle ABC$ 相似于 $\triangle A'B'C'$, 记作

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

事实上,要确定两个三角形相似,并不需要知道它们的三对角都对应相等、三对边都对应成比例,只要知道其中某些条件就可以了.

如图 3-30 所示，假设在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 所对的边是 a，b，c；在 $\triangle A'B'C'$ 中，$\angle A'$，$\angle B'$，$\angle C'$ 所对的边是 a'，b'，c'. 下面分三种情况来讨论.

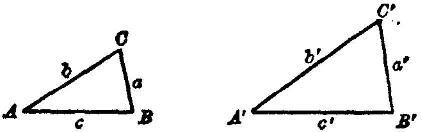


图 3-30

(1) 如果 $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，那么 $\angle C=\angle C'$.（为什么？）依据正弦定理，有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \quad \text{和} \quad \frac{a'}{\sin A'}=\frac{b'}{\sin B'}=\frac{c'}{\sin C'}.$$

由于两个三角形对应角相等，于是有

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

就是说，$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 的对应角相等，对应边成比例，因此这两个三角形相似. 由此得到：

三角形相似判定法则 1 如果一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等，那么这两个三角形相似.

(2) 如果 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$，设它们的比值为正数 k，即 $a=a'k$，$b=b'k$，$c=c'k$. 再由余弦定理，有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，即

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(b'k)^2+(c'k)^2-(a'k)^2}{2(b'k)(c'k)}$$

$$=\frac{k^2(b'^2+c'^2-a'^2)}{k^2(2b'c')}=\cos A'.$$

因为 $\angle A$，$\angle A'$ 都是三角形的内角，于是 $\angle A=\angle A'$；同样也

有 $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$. 这两个三角形对应角相等，根据上面的判定法则 1 可知，它们相似. 因此得到：

三角形相似判定法则 2　如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，那么这两个三角形相似.

(3) 如果 $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$（设比值为正数 k），并且它们的夹角相等，即 $\angle C=\angle C'$，那么，由余弦定理，有

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\\&=(a'k)^2+(b'k)^2-2(a'k)(b'k)\cos C'\\&=k^2(a'^2+b'^2-2a'b'\cos C')\\&=k^2c'^2.\end{aligned}$$

就是说 $\frac{c}{c'}=k$，于是

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

即它们的对应边都成比例. 根据上面的判定法则 2 可知，这两个三角形相似. 由此又得到：

三角形相似判定法则 3　如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那么这两个三角形相似.

【例 1】 工厂里用的比例规（图 3-31）是根据相似三角形原理制成的一种画图工具. 用它可以把线段分成相等的若干段，或是按一定的比例放大或缩小已知的线段.

比例规是由等长的两脚 AD 和 BC 构成的，两脚的中间都有沟槽，槽边刻有刻度，槽内所装的螺丝钉 O 可以固定在槽内任何地方.

如果要把线段 AB 三等分（图 3-31），只要调节螺钉 O 的位置，使 $OA=3OD$, $OB=3OC$. 即

$$\frac{OA}{OD}=\frac{OB}{OC}=3.$$

在两个三角形 AOB 和 DOC 中，$\angle COD=\angle AOB$（对顶角相等）。根据判定法则 3 可知，$\triangle ABO \backsim \triangle DCO$. 两三角形相似，它们的对应边成比例，所以 $\frac{AB}{CD}=3$，即

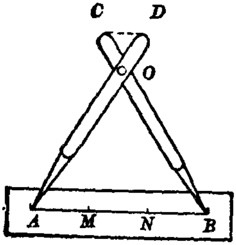


图 3-31

$$CD=\frac{1}{3}AB.$$

因此，把比例规倒转过来，用脚尖 C, D 在线段 AB 上以 A 为起点，连续截取，就可以把 AB 分成三等分.

同样我们看到，AB 缩小到原来的 $\frac{1}{3}$，就等于 CD；CD 扩大 3 倍就等于 AB. 因此，比例规又可以用来缩小或放大已知线段.

对于直角三角形，还有下述相似判定法则：如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应成比例，那么这两个直角三角形相似.

【例 2】 某船厂轮船下水时的滑道如图 3-32 所示，它的全长是 150 米，高是 7 米. 为了适应生产发展的需要，要把原来滑道的长扩建成 200 米. 求扩建后的高度.

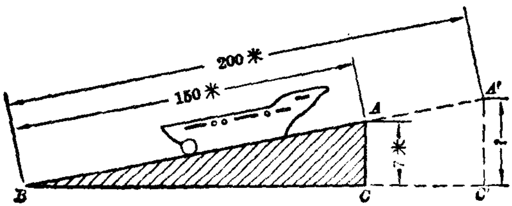


图 3-32

解：在直角三角形 ABC 和 $A'BC'$ 中，锐角 $\angle B$ 是公共角，

$$\therefore\quad \triangle A'BC' \backsim \triangle ABC,\ (为什么?)$$

于是

$$\frac{A'C'}{AC}=\frac{A'B}{AB},$$

$$\therefore\quad A'C'=\frac{A'B\cdot AC}{AB}=\frac{200\times 7}{150}\approx 9.3(\mathrm{m}).$$

即扩建后滑道的高度应该是 9.3 米.

练习

1. 两三角形的边长分别是 (1) 3, 5, 8 和 6, 10, 14, (2) 1, 3, 4 和 3, 9, 12; 它们是否相似?
2. 直角三角形相似判定法则为什么能成立?

2. 相似三角形的性质　两个相似三角形中:

(1) 对应高的比、对应中线的比和对应角平分线的比，都等于它们的相似比;

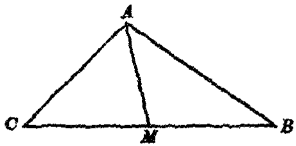


图 3-33

(2) 周长比等于它们的相似比，面积比等于它们的相似比的平方.

从三角形的一个顶点 A (图 3-33) 到对边中点的连线 AM，叫做该边上的中线.

关于(1)，我们只证明两个相似三角形的对应高的比等于它们的相似比，其余的证法是类似的.

假设两个相似三角形 $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，它们的对应边的比是 k (图 3-34)．边 AB 和 $A'B'$ 上的高是 h_c 和 h'_c.

在直角三角形 ACD 和 $A'C'D'$ 中，$\angle A=\angle A'$，$\dfrac{b}{b'}=k$，所以 $\triangle ACD \backsim \triangle A'C'D'$，(为什么?) 因此有

$$\frac{h_c}{h_c'}=\frac{b}{b'}=k.\ (\text{为什么?})$$

这就说明两个相似三角形对应高的比，等于它们的相似比。

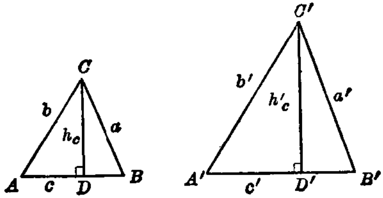


图 3-34

关于(2)，先来看它们的周长比。因为

$$a=ka',\ \ b=kb',\ \ c=kc',$$

于是得

$$\frac{a+b+c}{a'+b'+c'}=\frac{ka'+kb'+kc'}{a'+b'+c'}=\frac{k(a'+b'+c')}{a'+b'+c'}=k.$$

就是说，两个相似三角形的周长比，等于它们的相似比。

再来看面积比．因为

$\triangle ABC$ 的 面积 $S=\frac{1}{2}ch_c$， $\triangle A'B'C'$ 的面积 $S'=\frac{1}{2}c'h_c'$.

于是得

$$\frac{S}{S'}=\frac{\frac{1}{2}ch_c}{\frac{1}{2}c'h_c'}=\frac{c}{c'}\cdot\frac{h_c}{h_c'}=k\cdot k=k^2.$$

就是说，两个相似三角形的面积比，等于它们的相似比的平方．

3．相似多边形　三角形是多边形的基础，又是多边形的特例．“特殊的事物是和普遍的事物联结的”．我们把相似多边形的问题转化为相似三角形的问题来研究。

完全和三角形相似一样，在两个多边形中，如果它们的对应角相等，对应边成比例，那么这两个多边形就叫做相似多边形．这里对应边的比也叫做它们的相似比．例如在图 3-35 中，如果

$$\angle A=\angle A', \quad \angle B=\angle B', \quad \angle C=\angle C',$$
$$\angle D=\angle D', \quad \angle E=\angle E';$$

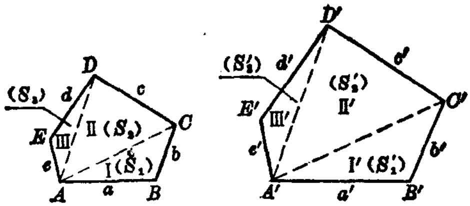


图 3-35

并且

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=\frac{d}{d'}=\frac{e}{e'}=k(\text{相似比}).$$

我们说这两个多边形相似，记作

$$\text{多边形 } ABCDE \backsim \text{多边形 } A'B'C'D'E'.$$

显然，

$$\frac{a+b+c+d+e}{a'+b'+c'+d'+e'}=\frac{ka'+kb'+kc'+kd'+ke'}{a'+b'+c'+d'+e'}$$
$$=\frac{k(a'+b'+c'+d'+e')}{a'+b'+c'+d'+e'}=k.$$

即两相似多边形的周长比，等于它们的相似比．

从两个相似多边形的一对对应顶点（例如 A，图 3-35）出发，引对角线，可以把两个多边形分成个数相等，排列顺序相同的相似三角形．

$$\triangle I \backsim \triangle I', \quad \triangle II \backsim \triangle II', \quad \triangle III \backsim \triangle III'.$$

根据相似三角形的性质，它们的面积和之比

$$\frac{S_1+S_2+S_3}{S'_1+S'_2+S'_3}=\frac{k^2\cdot S'_1+k^2\cdot S'_2+k^2\cdot S'_3}{S'_1+S'_2+S'_3}$$

$$=\frac{k^2(S'_1+S'_2+S'_3)}{S'_1+S'_2+S'_3}=k^2.$$

即两个相似多边形的面积比，等于它们的相似比的平方.

这些性质也适用于一般形状相同的平面图形.

【例 3】 某公社要建造一个农业机械修配厂，已经测绘出这块地区的平面图，比例尺是 1:1000. 如果图纸上厂房的面积是 18.16 厘米²，那么这个厂的实际面积是多少？

解：平面图与实际地形是相似的，它们的相似比是 $\frac{1}{1000}$. 如果设厂的实际面积为 S 厘米²，那就有

$$\frac{18.16}{S}=\left(\frac{1}{1000}\right)^2,\text{（为什么？）}$$

因此

$$S=1000000\times18.16=18160000(\mathrm{cm}^2)$$
$$=1816(\mathrm{m}^2)=2.724(\text{亩}).$$

二、估　　测

测量距离、高度的精确度要求不高时，我们可以应用相似形的知识，进行简易的估测. 劳动人民在实践中创造了不少估测的方法，下面作一些介绍.

1. 距离估测

(1) 步测：进行步测首先要准确地了解自己的复步长度（一复步就是在一般行进中同一只脚跨出的距离，一复步等于二单步）. 计算复步长度的方法是：在 200 米的距离上，以自己均匀的步幅来回走 2～3 次（次数越多，越准确），记住每次

所走的复步数，算出平均复步数，再以200除以这个平均数，就得到自己的每一复步的长度．在测量某一地段距离时，用自己的复步长度乘以复步数，就得到所测地段的距离．

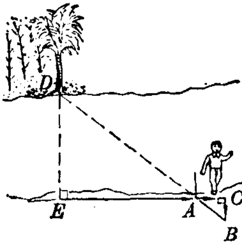


图 3-36

【例4】 如图3-36所示，先从面向对岸点D的点E处沿着垂直于DE的方向，走100步到点A，在地面插一根竿子；再沿着EA的方向继续走20步到点C；在点C再转一个直角，背河岸走12步到达点B，这时D，A，B三点恰好在一直线上．如果自己的复步长度是0.75米，求出河宽ED是多少米．

解：如上所说的步测方法，有

$$EA=0.75\times100=75(\text{m}),\quad CA=0.75\times20(\text{m}),$$

$$CB=0.75\times12(\text{m}).$$

又因为两个直角$\triangle EAD\backsim$直角$\triangle CAB$，(为什么？)所以

$$\frac{ED}{CB}=\frac{EA}{CA},$$

因此，

$$ED=\frac{CB}{CA}\cdot EA=\frac{0.75\times12}{0.75\times20}\times75=\frac{3}{5}\times75=45(\text{m}).$$

(2) 跳眼法：面对目标，右手竖起拇指向前伸出距眼约60厘米，位于两眼之间(图3-37)．先闭左眼，以右眼的视线通过拇指一侧，和所测目标的一侧对正；然后保持头部不动，闭上右眼，以左眼的视线通过拇指的同一侧．这时左眼看到一个和目标在同一横线上的某地物．根据经验判断出或测出目标到该地物间的距离(叫做跳眼间隔距)，并将该距离乘上一个常数10，就可以得出目标距离．

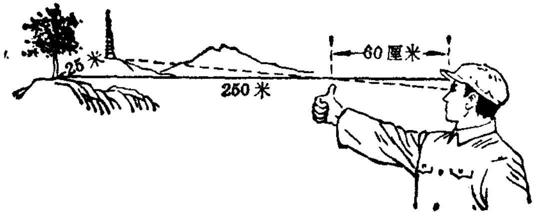


图 3-37

实际上这里的两个三角形相似(图 3-38). 因为一般人两眼之间的距离约为 6 厘米，而$\frac{60}{6}=10$. 所以如果目标到某地物间的距离是 25 米，那么观测者到目标的距离就是 $25\times10=250$ 米了. 通常可以直接用下面的公式进行计算:

$$目标距=跳眼间隔距\times10.$$

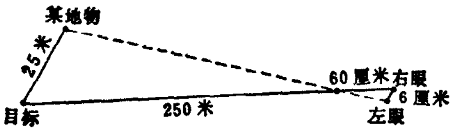


图 3-38

2. 高度估测

(1) 堤坝高度估测: 贫下中农常用下列方法估测堤坝的高度. 如图 3-39 所示，把直尺 FC 的一端 F 抵住堤坝边，让直尺处于水平位置. 再在另一端 C 吊一重锤，使锤尖 B 刚刚触及坡边. 因为直角三角形 DEA 中的 $\angle A$ 等于直角三角形 BCF 中的 $\angle 1$, (为什么?) 因此这两个直角三角形相似. 它们的

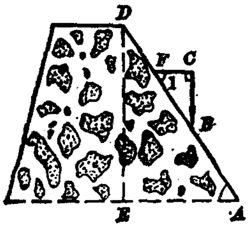


图 3-39

对应边成比例，有

$$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{FB},$$

因此

$$DE=\frac{AD\cdot BC}{FB},$$

也就是

$$\text{堤坝高}=\frac{\text{坡边长}\times\text{吊线长}}{\text{尺端到锤尖长}}.$$

因此只要测出这个等式右端的三个长度，就可以算出堤坝的高度来.

(2) 腕测：用这个方法可以粗略地估测象电线杆等物体的高．手拿一根直尺，向着电线杆平伸手臂，并使直尺和电线杆平行．用右眼（图 3-40 中点 O）沿尺顶端瞄视电线杆的顶端（OCA），大拇指沿小尺上下移动，使与电线杆底部相重合（ODB）．读出尺上刻度（CD），例如为 12 厘米．如已知目测者到电杆的距离 $OE=30\,\text{m}$，臂长 $OF=60\,\text{cm}$．因为$\triangle OCD\backsim\triangle OAB$，它们的对应高的比等于相似比，所以 $\frac{AB}{CD}=\frac{OE}{OF}$，那么电线杆的高

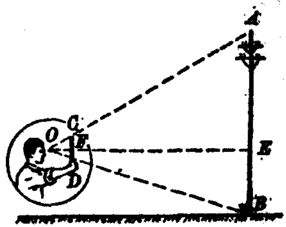


图 3-40

$$AB=\frac{CD}{OF}\cdot OE=\frac{12}{60}\times3000=600(\text{cm}).$$

就是说，电线杆高为 6 米.

如果已知电线杆的高，用这个方法也可测出距离.

(3) 比例测高器：在木杆上固定一块竖直的长方形木板（图 3-41），木板上粘着一张厘米方格纸，在方格纸的右下角

钉上一个小钉．这样就制成了一只比例测高器．

要测定某一物体的高度 h 时，把这个比例测高器插在离该物体距离为 d 的一点 A 处．为了使方格纸与地面成铅直，可以在任一方格的交点悬一重锤．重锤线与该方格线重合，即符合要求．沿着木板表面经过小钉向上瞄准物体的顶点，在视线与任一方格纵线的交点上插一大头针．再分别数出由大头针到小钉的竖直方向和水平方向的格数，即得到纵向和横向的距离 a 和 b．根据相似三角形的原理，就很容易得到计算这个物体高度的式子：

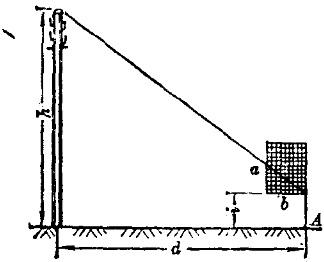


图 3-41

$$h=\frac{a}{b}\cdot d+i,$$

这里的 i 是方格纸上小钉位置离开地面的高度．

小　结

1．如果两个三角形的对应角相等，对应边成比例，那么这两个三角形叫做相似三角形．对应边的比叫做相似比．

2　符合下列条件之一的两个三角形必相似：

(1) 两组对应角分别相等；

(2) 三组对应边成比例；

(3) 两组对应边成比例，夹角相等．

3．相似三角形的性质：

(1) 对应的高、中线、角平分线和周长的比等于相似比；

(2) 面积的比等于相似比的平方．

4. 如果两个多边形的对应角相等，对应边成比例，那么这两个多边形叫做相似多边形. 对应边的比叫做相似比.

5. 相似多边形的性质：

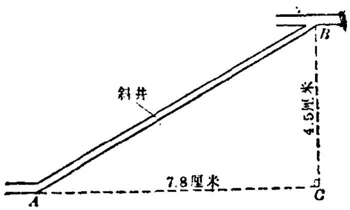
(1) 周长的比等于相似比；

(2) 面积的比等于相似比的平方.

6. 利用相似三角形的概念可进行某些简易测量，例如测距和测高等.

习 题

1. 在伟大的批林批孔运动中，煤矿工人回忆了解放前血泪斑斑的苦难生活，狠批了林彪效法孔丘"克己复礼"妄图复辟资本主义的罪行. 解放前，矿工每天要沿着斜井 AB 背煤 30 趟(附图). 按图所示尺寸，计算当时煤矿工人每天要负重爬井多少公里？



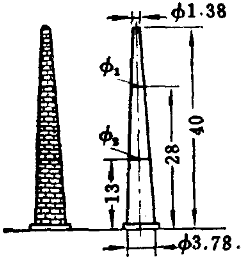
比例 1:10000

(第 1 题)

2. 在设计柴油机拖轮时，需要计算船底的高度. 已知图中基线 PA 被分成十等分，并且船底最大高度 $AB=550\,\mathrm{mm}$，试求出船底 E，M 处的高度 EF 和 MN.

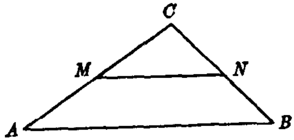
(第 2 题)

3. 如图的烟囱上有两个水泥腰箍，求它们的直径 ϕ_1, ϕ_2.



(单位：米)

(第 3 题)

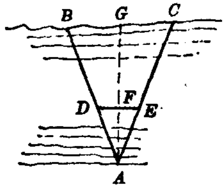


(第 4 题)

4. 证明三角形两边中点的连线平行于第三边，且等于第三边的一半.（利用相似三角形原理.）

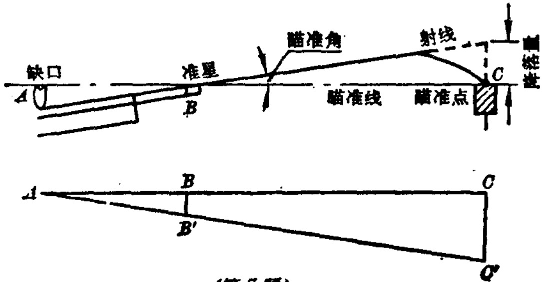
5. 图纸上红旗水库的面积是 16 平方厘米，图纸的比例尺是 1:50000，求水库的实际面积.

6. 某民兵用腕测法测量河宽. 他伸平手臂，使直尺平行于对岸 BC. 当眼看对岸的两地物 B, C 时，视线在直尺上所截的一段 DE 的长为 8 厘米. 如果 BC 间的距离是 1.4 米，臂长 AF 是 60 厘米，求河宽 AG.



(第 6 题)

7. 在射击瞄准时，要求表尺缺口上沿中央的点 A, 准星尖端 B 以及瞄



(第 7 题)

准点 C 在一条直线上．如果瞄准时把 B 偏向 B' 点，那么弹着点就偏到 C' 点．五〇式冲锋枪的瞄准基线 AB 长 36.5 厘米，在 200 米射程中，当瞄准偏差 BB' 为 1 毫米时，弹着点将偏差多少厘米？

第四节　全等三角形及其应用

一、全等三角形的概念与判定

工人师傅在下料时，往往按照样板划出图形，然后进行切割．这样切割下来的钢板和原来样板的形状、大小完全一样，放在一起就能完全重合．

我们把能够完全重合的两个图形叫做全等形．能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形．通常用"≌"表示全等，读作"全等于"，如 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 全等，就记作

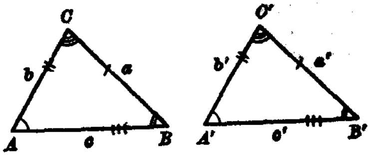


图　3-42

$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

两全等形迭合时，相互重合的元素叫做对应元素，全等形的对应元素相等．

例如在图 3-42 中，如果 $\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'$，那么，

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C';$$

并且，　$a=a',\qquad b=b',\qquad c=c'.$

对比全等三角形和相似三角形的意义，容易看出，全等三角形只是相似三角形相似比等于 1 时的特殊情况．

要确定两个三角形是否全等，可以把其中一个放在另一个上面，看它们是否重合．很明显，如果两个三角形的三条边和三个角都对应相等，这两个三角形就能重合．但实际上，要

判定两个三角形全等，只要有某几个元素对应相等就可以了.

三角形全等判定法则 1　如果一个三角形的两个角及其夹边和另一个三角形的两个角及其夹边对应相等，那么这两个三角形全等(简写成角、边、角).

三角形全等判定法则 2　如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应相等，那么这两个三角形全等(简写成边、边、边).

三角形全等判定法则 3　如果一个三角形的两条边及其夹角和另一个三角形的两条边及其夹角对应相等，那么这两个三角形全等(简写成边、角、边).

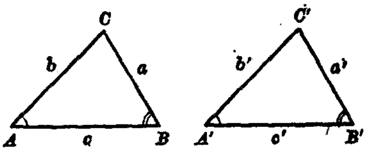


图 3-43

这三个判定法则可以分别由三角形相似的判定法则 1, 2, 3 推出来. 我们只举第一个法则作为例证.

如图 3-43 所示，假设在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 中，

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad c=c'.$$

根据三角形相似判定法则 1, 有

$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C',$$

因此，

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}.$$

由 $c=c'$ 可得
$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=1,$$

也就是

$$a=a',\quad b=b'.$$

又容易得到

$$\angle C=\angle C',$$

因此

$$\triangle ABC\cong\triangle A'B'C'.$$

对于直角三角形，还有下述判定方法：

如果两个直角三角形的斜边和一条直角边对应相等，那么这两个直角三角形全等.（为什么？）

三角形全等判定法则在生产实践方面有重要的应用.

【例 1】 三角形的稳定性.

按照三角形全等判定法则 2，一个三角形只要三条边的长度确定了，它的形状和大小就确定了，这叫做三角形的稳定性，它是三角形特有的性质.

三角形的稳定性有它实际的应用. 例如，为了使房屋坚固稳定，墙壁的上面常用人字架支撑；为了使梯子加固，在它的脚上常钉上一个钩子(图 3-44).

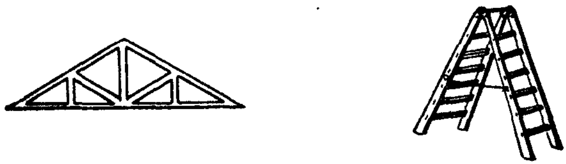


图 3-44

相反，由四根木架钉成一个四边形的架子，它的形状就可以改变. 四边形的这种不稳定性，也被合理地应用到生活实践和生产实践中去. 例如，商店门口的铁拉门和吊装棉花包的吊钩（图 3-45）等.

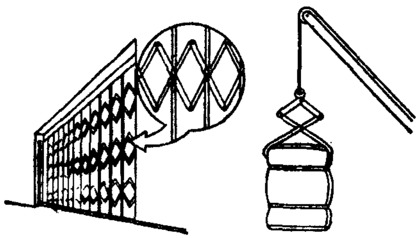


图 3-45

【例 2】 内外卡.

不能直接量出工件的宽度或厚度时，常用如图 3-46(1) 所示的内外卡.

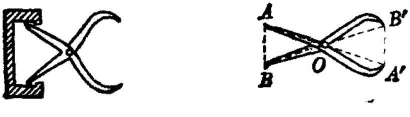
在图 3-46(2) 中，A, O, A' 和 B, O, B' 分别在两条直线上，并且 $AO=A'O$, $BO=B'O$；又 $\angle AOB=\angle A'OB'$；所以

$$\triangle AOB\cong\triangle A'OB'.\ (\text{边、角、边})$$

因而

$$AB=A'B'.$$

如果用 AB 去卡工件的内槽，那么 $A'B'$ 的长就是内槽的宽度。



(1) (2)

图 3-46

二、有关全等三角形的作图

在生产实践中，我们常要按照已知尺寸在钢板上划线，或根据设计要求画出图样．现介绍几种有关全等三角形的作图方法．

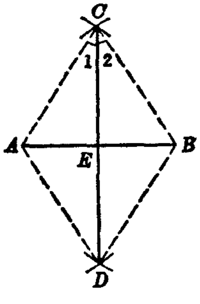


图 3-47

1．画已知线段的垂直平分线 线段 AB 的垂直平分线，就是通过 AB 的中点并且垂直于 AB 的直线．画法是：分别以已知线段的两个端点 A 和 B 为圆心，以适当的长（超过 AB 的一半）为半径，画两条弧相交于 C 和 D，如图 3-47．连接 CD．CD 就是 AB 的垂直平分线．

事实上，连接 AC, BC, AD 和 BD．在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle BCD$ 中，CD 是公共边；又根据画法可知 $AC=BC$, $AD=BD$．

所以 $$\triangle ACD\cong\triangle BCD,$$

因而 $$\angle 1=\angle 2.$$

又设 CD 交 AB 于 E. 在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCE$ 中，CE 是公共边，$\angle 1=\angle 2$, $AC=BC$; 所以

$$\triangle ACE \cong \triangle BCE.$$

因此 $AE=BE$, $\angle AEC=\angle BEC=90°$.

这就是说，CD 是 AB 的垂直平分线.

如图 3-48 所示的木工师傅用的木钻，钻身穿过横臂中间的圆孔，并且和横臂垂直. 如果把横臂看成一条线段，那么钻身就可看成是它的垂直平分线. 钻孔时，尽管横臂上下移动，但是连接横臂两端到钻身的绳子拉紧部分，这两段绳子的长总是相等的. 利用直角三角形全等的概念，可以证明：

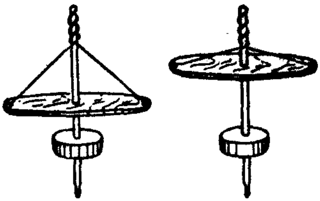


图 3-48

(1) 线段的垂直平分线上的点到线段的两端等距离.

(2) 到线段的两端等距离的点，必在这线段的垂直平分线上.

从运动的观点来看，一个动点按照到某一线段两端等距离的条件而运动，所成的图形是这线段的垂直平分线（图 3-49）. 通常我们说，到线段两端等距离的点的轨迹是这线段的垂直平分线.

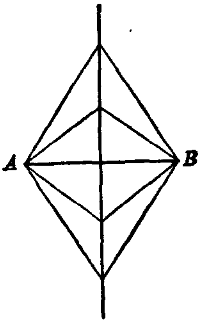


图 3-49

2. 画已知角的平分线 如图3-50, 已知 $\angle AOB$. 以顶点 O 为圆心，任意长为半径，画弧交已知角的两边于 C 和 D. 分别以 C 和 D 为圆心，适当的长为半径，画弧相交于 E. 连接 OE. OE 就是 $\angle AOB$ 的平分线.

事实上，连接 CE 和 DE. 在 $\triangle OCE$ 和 $\triangle ODE$ 中，OE 是公共边；又根据画法可知，$OC=OD$, $CE=DE$. 所以

$$\triangle OCE \cong \triangle ODE,$$

因而

$$\angle COE=\angle DOE.$$

就是，OE 是 $\angle AOB$ 的平分线.

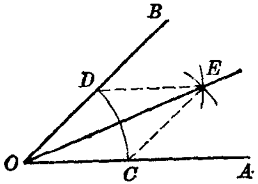


图 3-50

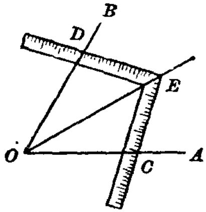


图 3-51

木工师傅常用角尺作一个角的平分线，它的根据和上述画法完全相同. 如图 3-51，在 $\angle AOB$ 的两边上，分别取 C, D 两点，使 $OC=OD$. 移动角尺使 C 和 D 分别落在角尺两边的相同刻度上. 这时连接已知角的顶点 O 和角尺顶点 E 的射线 OE，就是 $\angle AOB$ 的平分线.

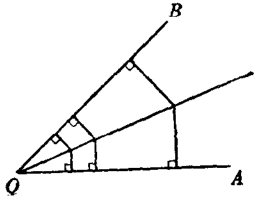


图 3-52

利用直角三角形全等的概念，也可以证明：

(1) 角平分线上的点到角的两边距离相等；

(2) 到一个角的两边等距离的点，在这个角的平分线上.

所以，从运动的观点来看，一个动点按照到某一个角的两边等距离的条件而运动，所成的图形是这个角的平分线（图 3-52）. 通常我们说，到角的两边等距离的点的轨迹是这个角的平分线.

3. 画一个角等于已知角　画一个角等于已知角，只要用量角器先量出已知角的度数，然后就可画出相同度数的角. 我们还可以用下面的方法来画.

已知 $\angle AOB$. 如图 3-53 所示，先画一条射线 O_1A_1. 以 O 为圆心，任意长为半径，画弧分别交 OA 和 OB 于 C, D 两点. 以 O_1 为圆心，OC 的长为半径，画弧交 O_1A_1 于 C_1. 然后以 C_1 为圆心，CD 的长为半径，画弧交上面所作的经过 C_1 的弧于 D_1. 连接 O_1D_1 并延长它，得到射线 O_1B_1. $\angle A_1O_1B_1$ 就与已知角 $\angle AOB$ 相等. 请读者自己证明为什么它们相等.

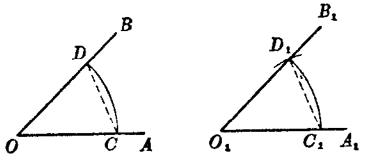


图 3-53

4. 已知两个角及其夹边，画三角形　公社某大队为了提高运输效率，计划在一条河上建造一座拖拉机桥. 经勘测决定在河的两岸 A, B 两处打好桥桩. 又在点 A 同一岸侧取一点 C（图 3-54），测得 $\angle CAB$ 为 92°，$\angle ACB$ 为 43°，并且量得 AC 的长为 44 米. 试在平面图上标出点 B 的位置.

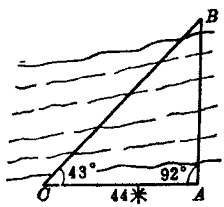


图 3-54

这个问题可归结为：已知三角形的两个角和它们所夹的边，要画出这个三角形. 根据三角形全等的判定法则 1，这样的三角形是确定的.

在平面图上，按比例画出 $AC=44\,\mathrm{m}$. 以 A 为顶点，AC 为一边画 $\angle CAD=92°$. 以 C 为顶点，CA 为一边，画 $\angle ACE$

$=43°$. AD 和 CE 相交于 B，点 B 就是对岸桥桩在地形图上的位置.

5. 已知三边，画三角形　例如，根据图 3-55 所示尺寸，在钢板上画出需要加工的三个孔.

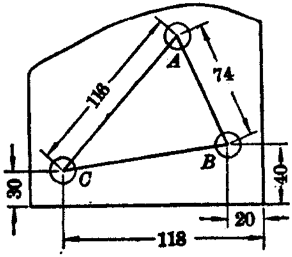


图 3-55

先按图纸上所标尺寸，定出 B, C 两孔中心的位置. 这样问题可以归结为已知三角形的三边，画出这个三角形. 根据三角形全等的判定法则 2，这个三角形是确定的.

以 C 为圆心，116 毫米为半径画弧；又以 B 为圆心，74 毫米为半径画弧. 设两弧相交于点 A，那么点 A 就是第三孔中心的位置.

6. 已知两条边及其夹角，画三角形　图 3-56 所示，是某远洋轮的尾部人字架. 制图时，首先要在图纸上确定两同心圆的中心 C 和两臂中心线的端点 A 和 B 的位置，如图 3-57 所示. 这就相当于已知两边和它们所夹的角，要画出这个三角形. 根据三角形全等的判定法则 3，这个三角形是确定的.

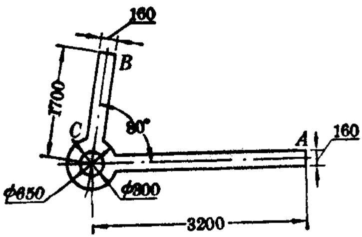


图 3-56

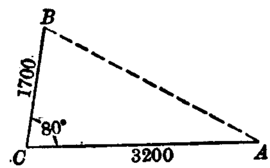


图 3-57

先画出 $CA=3200\text{ mm}$. 以 C 为顶点, CA 为一边, 画出 $\angle ACB=80°$, 并使 $CB=1700\text{ mm}$. 这时, A, B, C 三点的位置就确定了. 以 CA 和 CB 为两臂的中心线, 可以进一步按照设计尺寸画出整个图样.

三、对 称 图 形

1. 等腰三角形与轴对称图形 在第一章中我们已知道, 二条直角边相等的直角三角形叫做等腰直角三角形. 一般地, 有两条边相等的三角形叫做等腰三角形. 相等的两条边叫腰, 另一边叫底. 腰所对的角叫底角, 底边所对的角叫顶角.

如图 3-58 所示, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=AC$, AD 是 BC 上的高. 由于 $AB=AC$, AD 是公共的, 所以

$$\text{直角 } \triangle ADB \cong \text{直角 } \triangle ADC.$$

因此 $\angle B=\angle C$, $\angle 1=\angle 2$,

$$BD=CD.$$

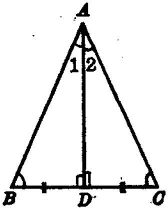


图 3-58

这就是说, 等腰三角形的底角相等, 并且底边上的高线、中线以及顶角的平分线是同一条直线.

【例 3】 钳工师傅为了把一条角钢在 A 处弯成 70° 的架子 (图 3-59), 需要在角钢上剪去一个等腰三角形 ABC. 怎样在角钢上划线.

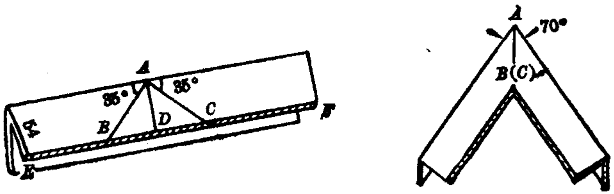


图 3-59

解：过点 A 作 AD 垂直于角钢的另一条边 EF. 假定等腰三角形 ABC 已经划出. 由于它的高 AD 也就是它的底边 BC 上的中线，所以 $BD=CD$. 又 $\angle ABD=35°$（内错角相等），$AD=54\text{mm}$. 在直角三角形 ABD 中，

$$BD=AD\operatorname{ctg}\angle ABD=54\operatorname{ctg}35°$$

$$=54\times1.4281=77(\text{mm}).$$

$$\therefore\quad CD=77(\text{mm}).$$

这样，我们就可以从点 D 起，在角钢的一边 EF 上向左和向右各截取 77 毫米得点 B, C, 连接 AB 和 AC, 就划出了等腰三角形 ABC.

一个图形如果沿某条线对折，在直线两旁的部分可以完全重合，那么这个图形就叫做轴对称图形. 这条直线就叫做对称轴（一般用点划线表示）（图 3-60）. 重合的两点叫对称点. 对称轴是对称点连线的垂直平分线.

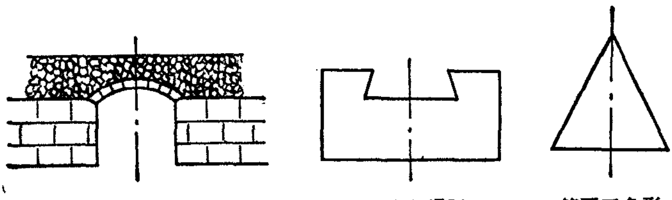


图 3-60

等腰三角形就是以底上的高线（中线或顶角的平分线）作为对称轴的轴对称图形.

因为成轴对称图形的物体受力均匀，制造方便，美观大方，所以在工农业生产和日常生活中有广泛应用.

2. **平行四边形和中心对称图形** 前面我们已知道，两组

对边分别平行的四边形叫做平行四边形．平行四边形在生产实践中有广泛的应用，如前面提到的图 3-45 中的铁拉篱门和吊钩，都采用平行四边形的结构.

如图 3-61 所示的平行四边形 $ABCD$ 用记号 $\square ABCD$ 表示.

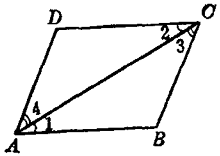


图 3-61

在 $\square ABCD$ 中，作对角线 AC,

$\because\ AB \parallel DC,\quad \therefore\ \angle 1=\angle 2;$

$\because\ BC \parallel AD,\quad \therefore\ \angle 3=\angle 4;$

又

$$AC=AC,$$

$\therefore\ \triangle ABC \cong \triangle CDA$,（角、边、角）

$$\therefore\ AB=DC,\quad BC=AD,$$

$$\angle B=\angle D,$$

又 $\because\ \angle 1+\angle 4=\angle 2+\angle 3,$

$$\therefore\ \angle A=\angle C.$$

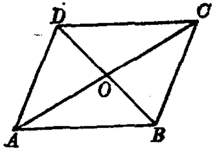


图 3-62

再作对角线 BD 交 AC 于点 O（图 3-62），同样可以证明

$$\triangle AOB \cong \triangle COD,$$

从而得 $$AO=OC,\ BO=OD.$$

这样，就得到平行四边形的性质：平行四边形的对边相等，对角相等，对角线互相平分.

反过来，如果一个四边形满足以下四种条件之一，那么这个四边形就是平行四边形．(1)两组对边分别相等，(2)两组对角分别相等，(3)一组对边平行而且相等，(4)两条对角线互相平分.

【例 4】 用两条绳索起重货物，如果两绳索与垂直线的夹角分别为 30° 与 15°，货物重 1000 公斤，求两绳索承受的拉力 F_1 和 F_2.

解：根据题意，两绳索承受的拉力的合力等于货重1000公斤，方向向上，这是一个已知合力求分力的问题．我们从物理学中知道，力的合成遵守平行四边形法则，即以两个分力为邻边作平行四边形，它们的合力可以用这个平行四边形的对角线来表示．

如图3-63所示，合力 AB 是以分力 AC, AD 为邻边的平行四边形 $ACBD$ 的对角线．现在我们来求分力 F_1 和 F_2.

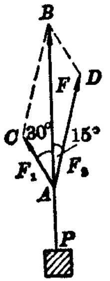


图 3-63

$\because\quad \angle ABC=\angle DAB=15°,\ \angle BAC=30°,$

$\therefore\quad \angle ACB=180°-(15°+30°)=135°.$

已知 $AB=1000$，由正弦定理

$$\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{CB}{\sin\angle BAC}=\frac{AB}{\sin(180°-\angle ACB)},$$

得

$$AC=\frac{AB\sin\angle ABC}{\sin(180°-\angle ACB)}=\frac{1000\cdot\sin 15°}{\sin 45°}=366\text{(公斤)},$$

$$CB=\frac{AB\sin\angle BAC}{\sin(180°-\angle ACB)}=\frac{1000\cdot\sin 30°}{\sin 45°}=707\text{(公斤)}=AD.$$

即二条绳索的拉力 F_1 为366公斤，F_2 为707公斤．

【例5】 要在某机械零件上画出等距的六个孔(图3-64)，当第一个孔与第六个孔的中心位置 A 和 B 已经确定时，可以采用等分线段的画法定出其余四个孔的中心位置．

画法：(1)由 A 作任一射线 AX；(2)在 AX 上依次截取 $AC'=C'D'=D'E'=E'F'=F'B'$；(3)连接 BB'，且过 C', D', E', F' 分别作 BB' 的平行线交 AB 于 C, D, E, F. 则 C, D,

E, F 就是 AB 的五等分点，也就是所要确定的四个孔的中心的位置.

为什么这样作出的点，将线段等分呢？下面我们来证明.

过 C 作 $CM \parallel AB'$ 交 DD' 于 M，则四边形 $CC'D'M$ 为平行四边形，

$$\therefore \quad CM = C'D',$$

也就是

$$CM = AC',$$

又

$$\because \quad CM \parallel AB', \ CC' \parallel DD',$$

$$\therefore \quad \angle 1 = \angle A, \ \angle 2 = \angle 3 = \angle 4,$$

因此

$$\triangle CMD \cong \triangle AC'C, \text{(角、边、角)}$$

$$\therefore \quad CD = AC.$$

同理可证，$DE = EF = FB = AC$.

所以 C, D, E, F 把 AB 五等分.

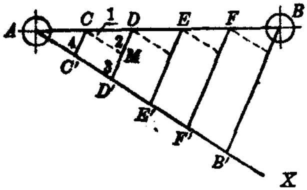


图 3-64

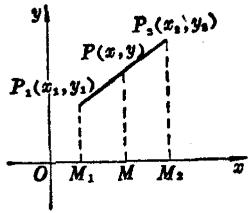


图 3-65

一般地说，如果一组平行线截一条直线所得的线段相等，则在另一条直线上所截得的线段也相等.

根据这一性质，我们可以在平面直角坐标系中，求得以 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 为端点的线段的中点 P 的坐标 (x, y).

在图 3-65 中，由 P_1, P, P_2 分别向 x 轴画垂线交 x 轴于

M_1, M, M_2, 显然,

$$P_1M_1 \parallel PM \parallel P_2M_2,$$

$$\because \quad P_1P = PP_2,$$

由上述性质得

$$M_1M = MM_2,$$

又

$$\because \quad M_1M = x - x_1, \quad MM_2 = x_2 - x,$$

$$\therefore \quad x - x_1 = x_2 - x,$$

即

$$2x = x_1 + x_2,$$

得

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

同理, 如果由 P_1, P, P_2 向 y 轴引垂线, 就可推得

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

所以 P_1P_2 的中点 P 的坐标是$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$.

【例 6】 已知三角形顶点的坐标 $A(-1, -1)$, $B(5, 2)$ 和 $C(-1, 4)$. 求 BC 上的中线 AD 的长(图 3-66).

解: D 是 BC 的中点, 所以它的坐标是

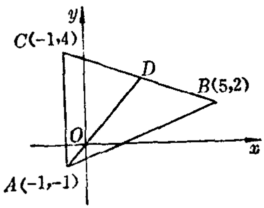


图 3-66

$$x = \frac{5 + (-1)}{2} = 2,$$

$$y = \frac{2+4}{2} = 3,$$

即 D 的坐标是$(2, 3)$. 根据第 47 页上平面上两点之间的距离公式, 可得中线

$$AD = \sqrt{(2+1)^2 + (3+1)^2}$$

$$= \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

一个图形, 如果绕着同平面内的某一点旋转 180°, 能够

和原来的图形完全重合，那么这个图形就叫做中心对称图形，这个点就叫做对称中心．重合的点也叫做对称点．对称中心平分对称点的连线(图 3-67)．

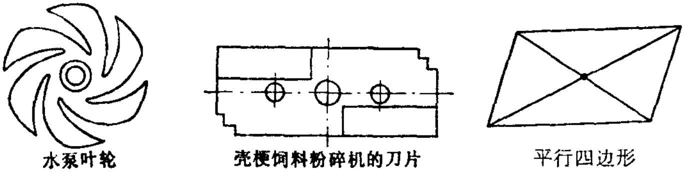


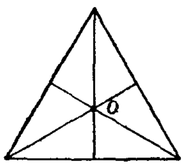
图 3-67

平行四边形就是以两条对角线的交点作为对称中心的中心对称图形．

中心对称的零件在旋转时很平稳，因此，旋转性的零件常设计成中心对称形状．

练习

三边相等的三角形叫做等边三角形．试说明等边三角形的三个角都相等(等于 60°)，并且每边上的高、中线和对角的角平分线是同一条直线．(这条直线也就是等边三角形的对称轴．等边三角形共有几条对称轴？)



四、大片麦田选场

随着农业生产机械化程度的日益提高，广大农村的麦田

有的已经连成大片．为了节省人力，打麦时要求就地设场．那么麦场设在什么地方才比较合理呢？

广大贫下中农根据他们丰富的实践经验，创造和总结了许多打麦场选场的方法．下面介绍用折纸法选择麦场位置的方法．

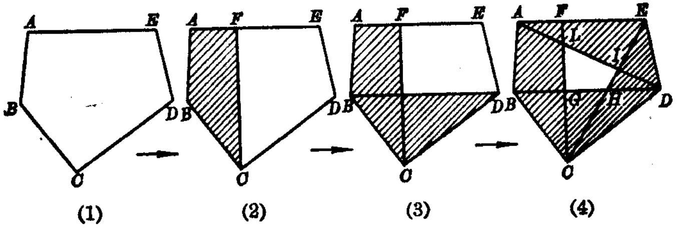


图 3-68

先按照麦田的实际形状，在纸上画一个麦田的相似图形，例如图 3-68(1)所示的 $ABCDE$．把这个图形剪下来．折迭图纸，使折过的部分包含在其他部分的里面，并在折缝处画一条线，又在折过的部分画上阴影线，如图 3-68(2) 中的 CF 和 $ABCF$ 部分．然后把图形换一个位置，按上法同样处理，如图 3-68(3)所示．照这样进行下去，又得到新的线条CE 和 AD. 随着阴影部分的逐步扩大，相应地未折过的区域就逐步缩小．麦场就应该设在如图 3-68(4)所示的 $GHIL$ 内．

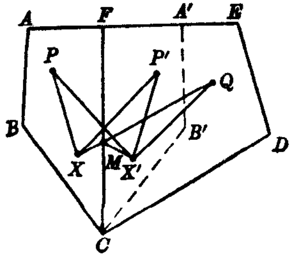


图 3-69

为什么能够这样选场呢？我们只就第一次的折迭情况加以说明．

事实上，当图形 $ABCF$ 依线段 CF 折迭后，它落在 $A'BCF$ 的位置上（图 3-69）．

$ABCF$ 和 $A'B'CF$ 是以 CF 为对称轴的对称图形.

如果麦场设在 $ABCF$ 内的任意一点 X 处, 把 X 关于 CF 的对称点记为 X', 我们可以说明, 把 $ABCF$ 和 $A'B'CF$ 的麦子运到 X 处和 X' 处, 所化的运输力是一样的.

假定小麦是均匀生长的, 那么在 $ABCF$ 内任何一处 P 有多少麦, 在 $A'B'CF$ 内的对称位置 P' 处也就有等量的麦. 根据轴对称图形的性质可知 $PX=P'X'$, $P'X=PX'$, 因此有

$$PX+P'X=PX'+P'X'.$$

因为对于 $ABCF$ 和 $A'B'CF$ 中的任意一对对称点 P 与 P' 都有上述关系, 所以可以说, 把 $ABCF$ 和 $A'B'CF$ 两个地区的麦子全部运到 X 处或运到 X' 处, 所用的运输力是相等的.

但是, 对于 $ABCF$ 和 $A'B'CF$ 以外的麦子, 运到 X 处显然比运到 X' 处所用的运输力要大.

假设 Q 是其他地区的任何一个地方, 连接 QX, 交 CF 于 M, 容易看出:

$$QX=QM+MX=QM+MX',$$

因为在三角形中, 两边之和总大于第三边, 所以

$$QM+MX'>QX',$$

就是

$$QX>QX'.$$

这说明不属于 $ABCF$ 和 $A'B'CF$ 两地区的麦子, 运到 X 处都比运到 X' 处所用的运输力要多.

因此, 在被折迭的 $ABCF$ 区域内是不宜设场的. 同样的道理, 在被折迭的其他区域内也都不宜设场. 由此可知, 麦场只应设置在区域 $GHIL$ 的里面.

显然, 成轴对称图形的麦田, 麦场应选在对称轴上, 成中心对称的图形的麦田, 麦场应设在对称中心.

应该指出，这里只是从运输力最省的角度去选择麦场. “世界上的事情是复杂的，是由各方面的因素决定的。看问题要从各方面去看，不能只从单方面看。”在具体选场时，我们还应该考虑到地势、河流、交通、仓库等等因素，因地制宜地灵活解决这类问题.

五、梯田修建中的等高线测量

英雄的大寨人发扬自力更生，重新安排河山的伟大气概，把七沟八梁一面坡的穷山沟，改造成层层梯田的粮仓．广大贫下中农学习大寨人战天斗地的革命精神，在改变荒山为梯田的战斗中，创造了一种简单实用的测量方法，用简易等高仪测量出一层层梯田的等高线.

如图 3-70 所示，就是由三根木条并挂有一只重锤而成的简易等高仪，其中 AB 和 AC 都长 1.5 米，开口 BC 也是 1.5 米． EF 是一根支架，$AE=AF$． 当系锤的绳子通过支架 EF 的中点 M 时，它就是 EF 的垂线．由于系锤的绳子总是垂直向下的，因此可以断定 EF 是水平的，而 B, C 两点等高.

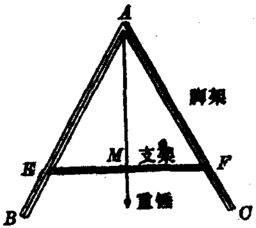


图 3-70

在山坡上测量等高线时，先置等高仪的一只脚于起点 a 处，另一只脚在山坡上作适当的上、下移动，使重锤线经过支架上的中点 M．这时另一只脚所在地面上的点 a_1 即和点 a 等高．在点 a_1 处打上桩号或用石灰粉做好标记．再以 a_1 为起点，重复上面的做法测得等高点 a_2．这样继续下去，得到等高点 a_3, a_4, …，直到回到原来的点 a 形成一条封闭曲线(图 3-71)。

参照图 3-72(1)，梯田的坡比常是 1:0.25，所以它的倾斜角 β 适合等式:

$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{DC}{BC}=\frac{0.25}{1}=0.25.$$

图 3-71

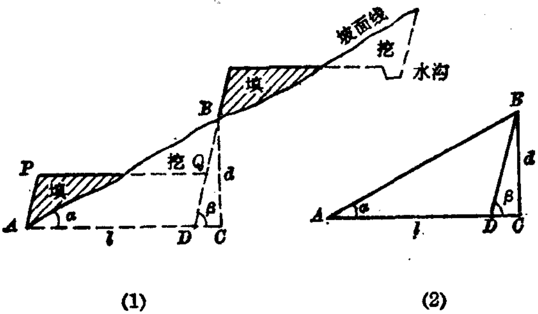


图 3-72

在测量第二条等高线前，应该根据山坡的倾斜角 α 以及每级梯田田面的设计宽度 PQ，定出第二条等高线的起点 B 与第一条等高线上一点 A 间的垂直距离 d.

因为 $ADQP$ 是一个平行四边形，所以 $AD=PQ$，用 l 表示 AD 的长，它就是梯田田面的设计宽度. 从分析图 3-72(2) 看，α, β 和 l 都是已知的，从直角 $\triangle ABC$ 和直角 $\triangle DBC$ 可得

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{l+DC}{d},\ \operatorname{ctg}\beta=\frac{DC}{d},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta=\frac{l+DC-DC}{d},$$

$$\therefore\quad d=\frac{l}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}.$$

就可以计算出B, A间的垂直距离d来.

这时,再由点B起,按照上面的方法进行测量. 测出了多条等高线,把它们作为梯田的中间线,用山坡上高出田面的部分填补低于田面的部分,一级一级加以平整,从而把山坡改成梯田.

小　　结

1. 能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形. 全等三角形的对应角相等,对应边也相等. 所以两个三角形全等,是两个三角形相似当相似比等于1时的特例.

2. 符合下列条件之一的两个三角形全等:

(1) 两角和夹边对应相等(角、边、角);

(2) 三边对应相等(边、边、边);

(3) 两边和夹角对应相等(边、角、边).

3. 点的轨迹:

(1) 到线段的两端等距离的点的轨迹是这线段的垂直平分线;

(2) 到角的两边等距离的点的轨迹是这角的平分线.

4. 有两边相等的三角形叫做等腰三角形,它是轴对称图形.

(1) 等腰三角形的底角相等;

(2) 等腰三角形的高、中线和顶角的平分线是同一条直线.

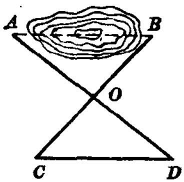
5. 两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形,它是中心对称图形. 平行四边形的对边相等,对角相等,对角线互相平分.

6. 连接点(x_1, y_1)和(x_2, y_2)的线段的中点的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

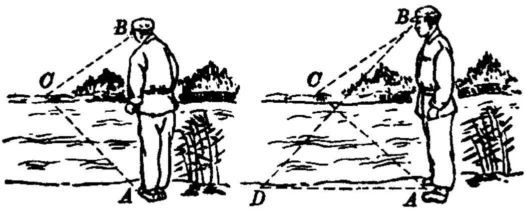
习　题

1. 在 A, B 两点间有障碍物，不能直接量出它们之间的距离．我们可以采用下述方法来测量：选取一点 O，延长 AO 到 D，延长 BO 到 C，使 $OD=OA$, $OC=OB$，那么 CD 的长度就是 AB 的长度．为什么？



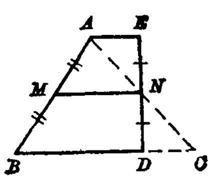
（第 1 题）

2. 某战士为了测量河宽，先直立在河边的点 A 望对岸，视线 BC 通过帽檐下沿的一点落在对岸的点 C 处；然后保持原有姿势，转动身体，视线通过帽檐下沿的同一点落在河这边的点 D 处，量出 AD 的长就得到河宽 AC．试说明道理．



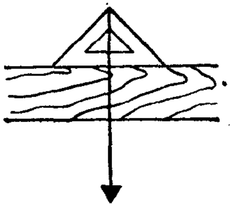
（第 2 题）

3. 试说明梯形两腰中点的连线平行于其他两边，且等于它们的和的一半．

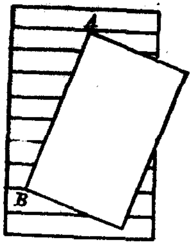


（第 3 题）

4. 农村里盖房屋时，常采用如图所示的方法检查房梁是否处于水平位置. 它的理由是什么?



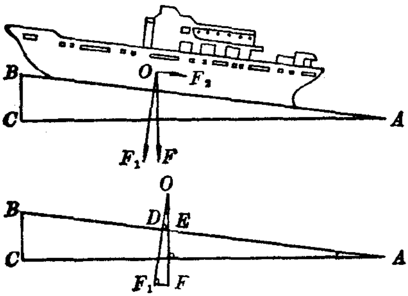
(第 4 题)



(第 5 题)

5. 如图所示,用等距离的横格线可以把一条线段 AB 分成 7 等分，为什么?

6. 已知船台水平距离 AC 和斜面长 AB 的比 $\frac{AC}{AB}=\frac{19}{20}$，当重量为 4500 吨的船体放在船台上时，船台斜面所受的力 F_1 是多少吨?



(第 6 题)

第四章　农村简易测量

广大贫下中农热烈响应毛主席关于"农业学大寨"的伟大号召，艰苦奋斗，战天斗地．在重新安排祖国山河的伟大斗争中，测量是一项不可缺少的工作．我们战斗在农村的广大知识青年要向贫下中农学习，熟悉、掌握有关农村简易测量的知识，以便更好地为建设社会主义新农村作出贡献．

第一节　怎样画生产队平面图

制订农村建设规划，需要画出有关地区的平面图．怎样测绘平面图呢？下面我们介绍怎样使用小平板仪来测绘生产队的平面图．

一、小平板仪的构造和安置

1．小平板仪的构造　小平板仪由平板、照准仪、指北针、移点器和三脚架等组成(图 4-1)．

(1) 平板：用矩形木板做成，背面有槽孔，可固定在三脚架上．

(2) 照准仪：主要用来瞄绘方向．如图 4-2 所示，由直尺、觇孔钣、分划钣构成．

直尺中间有管形水准器，两头有水准校正杆，用于检验平

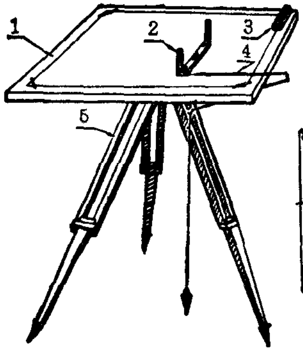


图 4-1

1—平板 2—照准仪 3—指北针 4—移点器 5—三脚架

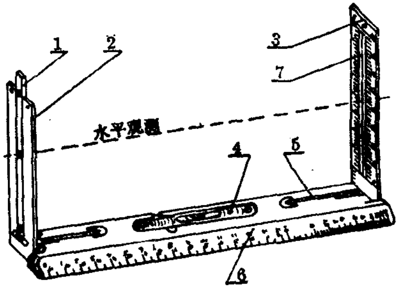


图 4-2

1—伸拔钣 2—觇孔钣 3—分划钣 4—管形水准器 5—校正杆 6—直尺 7—细丝

板是否水平．分划钣上有长形窗，中间铅直方向装有一根细丝．

觇孔钣上面有上、中、下三个觇孔，中孔一般用来水平观测．伸拔钣、分划钣上的刻度以及觇孔钣的上、下孔，主要用于测距、测高．

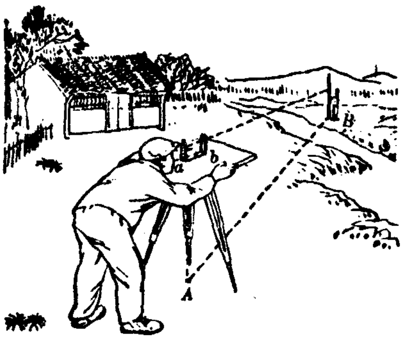


图 4-3

在测绘平面图时，照准仪主要用来划方向线．假定平板已安置好，我们用图纸上的 a 表示测站 A 的位置．在点 a 钉一大头针，将照准仪直尺紧靠大头针移动，并从中孔观测，使分划钣细丝与目标 B 处的标杆重合，然后用铅笔沿直尺划出直

线 ab. 直线 ab 就是测站 A 到目标 B 的方向线(图 4-3).

(3) 指北针：又称方框罗盘，作平板定向用(图 4-4).

(4) 移点器：如图 4-5，由一弯曲支架和重锤组成. 利用它可使地面上的点与图纸上的对应点位于同一铅垂线上.

(5) 三脚架：固定平板用.

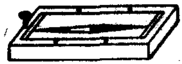


图 4-4

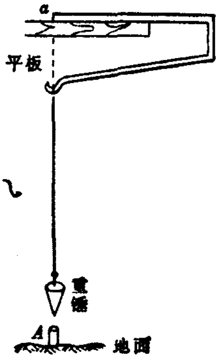


图 4-5

为适应农村测量工作的需要，广大贫下中农发扬"自力更生"，"艰苦奋斗"的革命精神，土洋结合，就地取材，自己动手设计制造了各种简易测量工具和仪器，发挥了很大的作用. 这里介绍一只土平板仪，它的构造如下(图 4-6).

(1) 平板：用长 55 厘米，宽 40 厘米，厚 1.5 厘米的木板做成.

(2) 三脚架：利用一个罐头筒(高约 11.5 厘米，直径约 8.5 厘米)和三条长 130 厘米、直径 1.5～2 厘米的小竹杆支撑而成. 平板与罐头

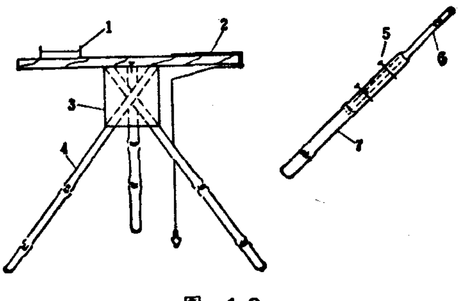


图 4-6

1—照准器 2—移点器 3—罐头筒 4—小竹竿
5—铁钉 6—小竹筒 7—大竹筒

筒的底面是用木螺钉把它们连接在一起的．为了能调节高低，其中一脚可用大竹筒套小竹筒，以便于伸缩．在大竹筒上相距 20 厘米处钻两个小孔，在小竹筒上钻若干个小孔，相邻两小孔间的距离为 5 厘米．这样便可根据地面倾斜情况而伸缩调节，平板调节至水平后，用两根铁钉插入小孔以固定大、小竹筒．

(3) 移点器：可用粗铁丝弯成(图 4-7)．AD 长约 25 厘米，A 点磨尖，在 B 处悬挂一小重锤，要求当 AD 在水平位置时，A，B，C 三点在同一铅垂线上．

(4) 照准器：照准器的直尺用一条横截面为梯形的结实木条做成，尺寸见图 4-8(1)．在斜边上划上刻度．觇孔钣和分划钣的厚约 0.5 厘米，长 120 厘米，宽 30 厘米．觇孔钣上中间钻个观测孔，孔的直径越小越好．觇孔钣和分划钣要与尺底垂直．

如果在平坦地区进行测量，可以在照准器底尺上竖两枚大头针来代替觇孔钣和分划钣[图 4-8(2)]．

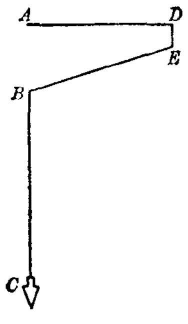
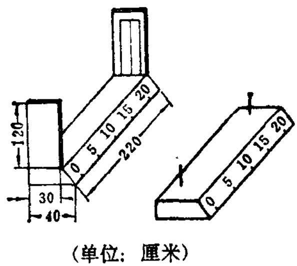


图 4-7



(单位：厘米)

(1) (2)

图 4-8

2．小平板仪的安置 在进行测绘时，首先要在测站上将小平板仪安置妥当．它对测绘工作的顺利进行影响很大．安置包括整平、对中、定向三个步骤．

(1) 整平：首先摆好三脚架，使平板大体上处于水平．然后调整平板，使照准仪上的水准器里的气泡，在两个相互垂

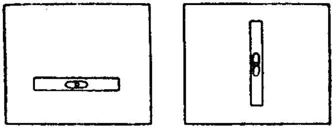


图 4-9

直的方向上都能居中，如图 4-9.

(2) 对中：借助移点器，使地面上的测站 A 与平板上图纸内表示这一测站的点 a 处于同一铅垂线上(参看图 4-5). 对中误差即垂锤到测站 A 的水平距离，一般在作 1:500 图形时，允许在 3 厘米以内；在作 1:1000 图形时，允许在 5 厘米以内.

(3) 定向：定向是使图纸上所画的直线与地面上相应的直线在同一垂直面上. 通常有两种办法：

(a) 用指北针定向：将指北针的外框与图纸外框的一边平行，然后转动图板位置，当磁针指向罗盘上的零时，可在图纸外框的这条边上标出指北方向.

这种定向的精度很低，如果图上已有已知直线时，就采用下面的方法定向.

(b) 用已知直线定向：使图纸上已知直线 ab 的一端 a 和地面上相应的点 A 对中，将照准仪直尺紧靠图纸上已知直线 ab，旋转图板，使照准仪瞄准地面上该直线的另一端 B. 此时，将图板固定，即已定向(图 4-10).

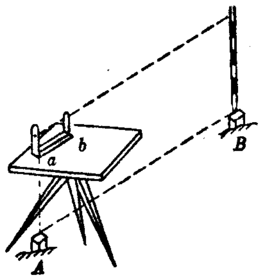


图 4-10

对中、整平、定向这三项工作是安置小平板仪的基本操作，它们互相联系，互相影响. 必须反复调整，相互兼顾，以达到预期的要求。

二、测绘平面图的方法和原理

用小平板仪测绘平面图，一般用如下两种方法.

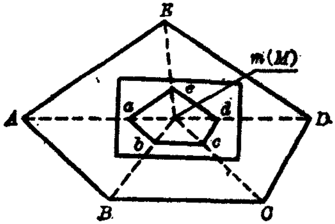


图 4-11

1. 射线法 射线法就是测出由测站点到被测点的方向和距离，以确定被测点在图上的位置的一种方法.

【例 1】 测绘某生产队一块多边形田的平面图.

我们用射线法测绘，步骤如下(图 4-11)：

(1) 在多边形田块 $ABCDE$ 内，选择测站点 M 安置平板，在图纸上适当位置取一点 m，用移点器使点 m 与点 M 对应，进行整平、对中、定向.

(2) 分别在 A, B, C, D, E 处竖立标杆.

(3) 从点 m 用照准仪先后瞄准地面上的 A, B, C, D, E 所竖标杆，画出点 M 到 A, B, C, D, E 的方向线 ma', mb', mc', md', me'.

(4) 量得 MA, MB, MC, MD, ME 的距离分别是：$MA=37.2\,\text{m}$, $MB=23.5\,\text{m}$, $MC=27.8\,\text{m}$, $MD=30.7\,\text{m}$, $ME=20.9\,\text{m}$.

(5) 用相同的比例 K (例如用 1:1000) 分别在方向线 ma', mb', mc', md', me' 上截取 $ma=3.72\,\text{cm}$, $mb=2.35\,\text{cm}$, $mc=2.78\,\text{cm}$, $md=3.07\,\text{cm}$, $me=2.09\,\text{cm}$. 定出地面上 A, B, C, D, E 各点在图纸上的对应点 a, b, c, d, e.

(6) 连接 ab, bc, cd, de, ea, 得多边形 $abcde$.

根据上述步骤可以看出，多边形 $abcde$ 与多边形 $ABCDE$

相似．因此，多边形 $abcde$ 就是多边形 $ABCDE$ 的平面图．

注意：射线法是最基本的方法，精确度也较高．但是用射线法必须具备下列两个条件：

(1) 测站点 M 能通视(无障碍物遮住视线)其他各被测点．

(2) 能直接量出测站点到被测点的距离．

2．前方交会法　前方交会法就是以两个测站对被测点瞄准，绘出两条方向线的交点的方法．

【例 2】　如图 4-12 所示，地面上 A，B 两点位于小河南岸，点 C 在小河北岸．试从 A，B 两点测绘点 C 的位置．

由于 A，B 两点与点 C 相隔一条小河，不易直接量出 AC 或 BC 的长，我们采用前方交会法测出该点．步骤如下：

(1) 在点 A 处安置小平板仪，在图纸上作对应点 a，用射线法可得点 B 在图纸上的对应点 b．

(2) 用照准仪直尺紧靠点 a 照准点 C，画出 AC 的方向线 ac'．

(3) 将小平板仪移至点 B，以 ba 定向．

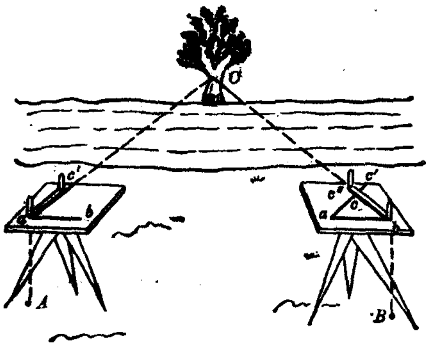


图 4-12

(4) 用照准仪直尺紧靠点 b 照准点 C，画出 BC 的方向线 bc''．bc'' 交 ac' 于点 c，点 c 就是小河北岸的点 C 在图纸上的位置．

使用前方交会法不必量出距离，受地形的影响少，且能测得不可到达的点．

在选 A，B 两点时，要考虑到方向线 ac' 与 bc'' 的交角不能太小，一般不小于 $30°$．

三、测绘生产队平面图

1．闭合导线测量 上面所介绍的射线法和前方交会法，它们的共同点是以一个或两个已知点为根据，来测定地物的某些点在图纸上的相对位置．但是，在生产队的范围内，地物较多，距离较远，中间又会有房屋等障碍物挡住视线，因此仅用一、二个已知点不可能把整个地区的地物都测绘出来，而是需要较多的已知点．为此，在测区周围和内部适当位置，选择若干点作为测绘的根据点，这种点叫做图根点，如图 4-13 中 A,B,C,D,E 各点．图根点的连线叫导线，如图中的 AB，BC，CD，DE，EA．这些导线组成闭合多边形．把这些图根点测绘在图纸上叫做闭合导线测量．

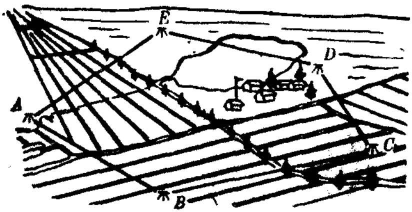


图 4-13

(1) 选点：选点就是沿所测区域进行踏勘，了解全区地物分布情况，按以下原则选取一定数量的图根点：

(a) 均匀分布在整个测区上，不稀不密，代表一些有显著

特征的地物位置;

(b) 通视良好,通过这些点能测得较多的地物,相邻的图根点必须通视;

(c) 各点之间距离不宜过长,一般在50～200米之间.

图根点选好后,进行打桩、编号,作好标记,画好草图,制定施测方案.

(2) 测绘导线:假定 A, B, C, D, E 为所选的图根点(如图4-14),测绘导线 $ABCDE$ 时,先将平板安装在点 A,向 AB 方向照准,并量出 AB 的长度,按图纸比例缩小绘于图纸上得 ab. 然后移动平板到点 B,通过整平、对中、定向,且使图纸上的 ba 与地面上的 BA 方向一致. 再照准 BC,按同样的比例将 BC 缩绘在图纸上得 bc. 同样方法可得 cd, de, ea'.

如果测绘时没有误差,a 与 a' 应重合. 但由于测量过程中,仪器、操作等原因,一般要产生误差,往往使 a 与 a' 不能重合,形成线段 aa'. 此线段 aa' 叫做导线的闭合差,一般用 δ 表示.

(3) 调整闭合差:由于导线在整个测区起着控制作用,导线测量的精确与否,将直接影响整个平面图的精确度,因此要求闭合差不能太大. 一般闭合差不应超过导线全长的

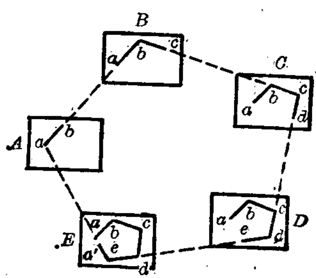
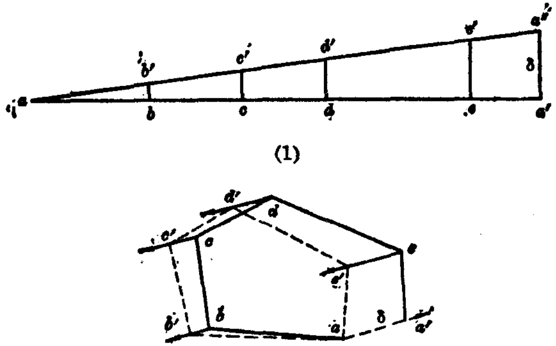


图 4-14

1/200．如果超过，则必须重测．导线的闭合差在允许范围内是可以调整的．调整闭合差的方法如下：

任作一射线，在射线上依次截取 ab，bc，cd，de，ea' 的长度(图 4-15)，在点 a' 作垂线并截取 $a'a''=\delta$，连 aa''．从 b，c，d，e 各点分别作 aa' 的垂线交 aa'' 于 b'，c'，d'，e'，得 bb'，cc'，dd'，ee'．这些线段即为各点的改正量．



(1)

(2)

图 4-15

然后在折线 $abcdea'$ 的顶点 b，c，d，e 分别作 aa' 的反向平行线．在反向平行线上分别截取各点的改正量 bb'，cc'，dd'，ee' 的长，连成闭合导线 $ab'c'd'e'$．在图形 $ab'c'd'e'$ 中，仍然含有误差，但这个误差很小，不会影响地物测绘的精确度．

2．*碎部测量*　碎部测量就是在闭合导线测量的基础上，从图根点出发，用射线法或交会法将地物的特征点(即地物的转折轮廓处，如墙角，路口等有代表性的点)测绘出来，然后根据地物的形状描绘成平面图．

在进行碎部测量时，要因地制宜．有些点或线段可根据

地物的几何形状画出来的，那么就不必测定．例如测绘一幢长方形的房屋，只要测出其中三个房角 A, B 和 C 就可以了，第四个房角可根据长方形的性质画出来(图 4-16)．另外，要取地物的关键点．如测河道，就要选取河岸弯曲，凹凸变化的一些特征点．如图 4-16 中，测出 H, I, S, K, L, M 等点后，就可仿照河岸形状绘出．

碎部测绘完后，要进行现场校对，以便及时发现漏测、漏绘或错绘的地物，随时予以补测或更正．

3．**加工整理** 野外的测绘工作完成后，还需在室内对所测的图纸进行加工整理．

如果在野外测绘的是两幅或两幅以上的图，要拼合起来成为一幅平面图．拼合时每一幅的相接地方一定有出入，因此，还要进行接边的工作．连接点误差不超过一毫米的，可

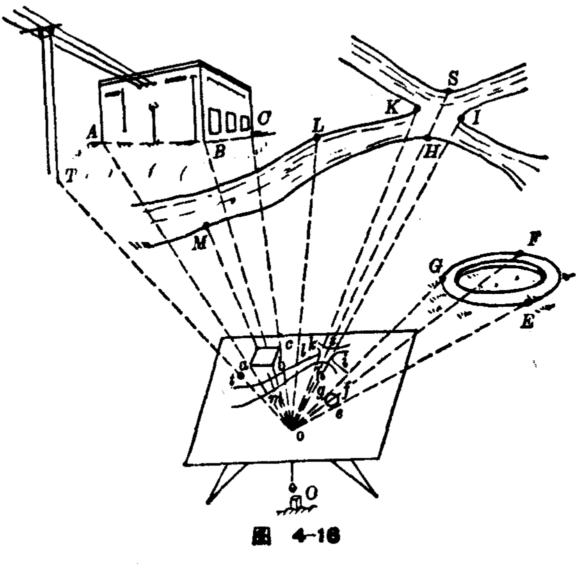


图 4-16

在图纸上作适当的调整，否则须到现场按实际情况进行改正.

各种地物要用各种不同的符号在图纸上简洁地表示出来. 地物在图上表示的式样叫做图式. 常用的图式如下表.

图　　式

	抽水机		乡村大路		河流		棚
	水闸		小路		树林		温室
	水泥桥		防空洞		棉花地		树篱
	木桥		旗杆		渠道		竹篱
	小桥		独立树		气象站		变压站
	高压 电线杆		稻田	沟	水沟		绿化
	电线杆		旱田	Ⅲ′	三层楼房		里程碑
	电话线杆		竹林	I′	一层平房		水井
	公路	塘	水塘		简屋		涵洞

对重要的地物写上文字注记. 画出图幅边框，写上图名，比例尺，绘出指北方向线等.

图 4-17 是某生产队的平面图.

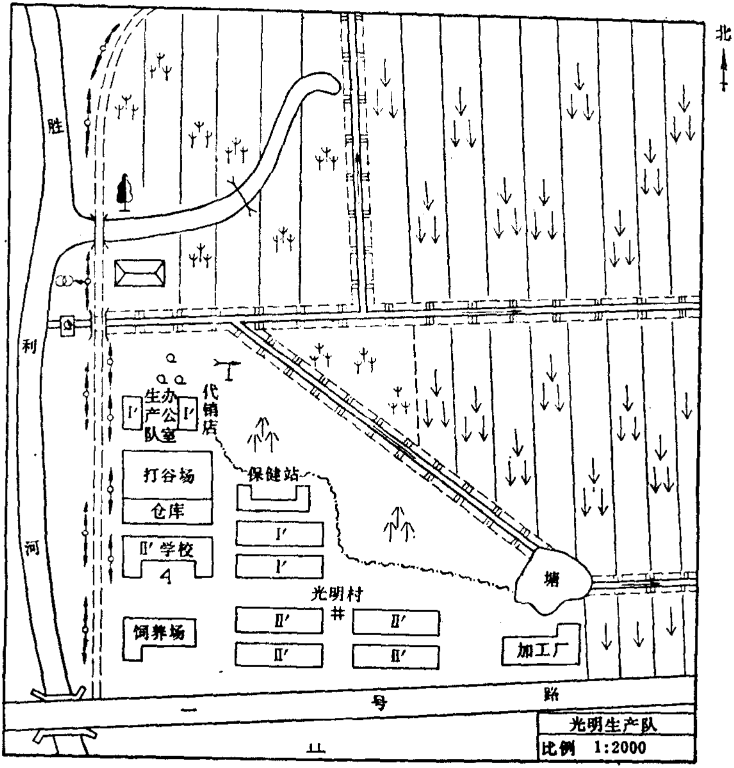


图 4-17

第二节 怎样测量地面高度

在毛主席的革命路线指引下，我国广大农村广泛进行着开河筑渠，引水上山，平整田地，修建水库等工程，这些工程都需要知道地面的高度．测定地面高度的工作叫水准测量．下面介绍有关水准测量的知识．

一、水准仪和水准尺的构造和使用

1．水准仪　水准仪是水准测量最主要的仪器．水准仪主要由望远镜(包括物镜、目镜与十字丝)，圆水准器，符合水准器构成，其他设备如脚螺旋，微倾螺旋等是用来调整和固定望远镜、水准器的．图 4-18 是国产 CSZ-1 型工程水准仪．

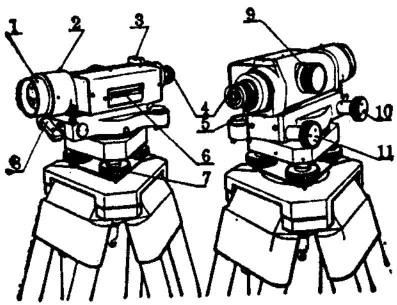


图 4-18

1—望远镜物镜　2—准星　3—缺口　4—望远镜目镜　5—圆水准器　6—符合水准器　7—脚螺旋　8—方向固定扳手　9—调焦轮　10—方向微动螺旋　11—微倾螺旋

2．水准尺和尺垫　水准尺用木料制成，按其构造不同分为整尺，折尺和塔尺，如图 4-19 所示．水准尺的尺面，每隔 1 厘米漆成黑白或红白相间的分格，每隔一分米有数字标记．因为望远镜中看出的是倒象，所以尺面上数字是倒写的．当望远镜调节到十字丝的交点对准水准尺上某一点时，就可以读出这一点的读数．

尺垫如图 4-20 所示．使用时将尖脚向地下踩稳，水准尺就稳固地立在中部的圆球顶上．

3．水准仪的使用　进行水准仪测量时，先将仪器固定在

三脚架上，然后安置在与相邻两测点大致等距离的位置上(不一定在两测点的连线上)．将三脚架的两脚向地下踩稳，挪动第三个脚使架头大致水平．

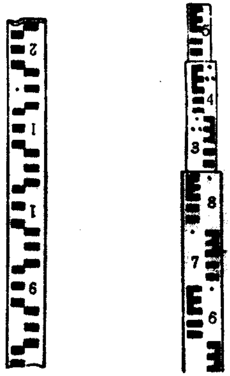


图 4-19

(1) 整平：整平是使圆水准器气泡居中，这时仪器旋转轴处于铅垂位置．调节气泡居中的方法如下：

(a) 选择两个脚螺旋分别用左右手作相反方向的旋转，使气泡走向中央，如图 4-21(1)所示．左手拇指的旋转方向就是使气泡移动的方向．

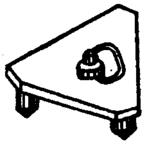
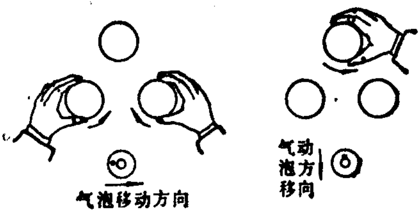


图 4-20

(b) 用右手转动第三个脚螺旋，再使气泡走向中央．右手拇指的旋转方向与气泡移动的方向相反，如图 4-21(2)所示．

以上两步动作交替进行，直至气泡居中为止(图 4-22)．



(1)　(2)

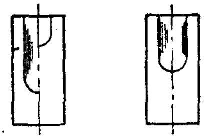
图 4-21

图 4-22

(2) 瞄准：先调节目镜，使十字丝清晰可见．然后移动望远镜，利用上部的准星，缺口使对准水准尺．将固定扳手扳

下，以固定望远镜方向．通过望远镜观察水准尺，转动调焦轮，使尺象清晰可见．再调节微动螺旋，使十字丝的竖丝对准水准尺．

(3) 读数：读数前转动符合水准器的微倾螺旋，使水泡严格居中，即调节到如图 4-23(2)的形状．这时视线处于水平位置，就可在望远镜内读出十字横丝在水准尺上的读数．如图 4-24 可读出 1.26 米．



(1) 未调节　(2) 调节好

图　4-23

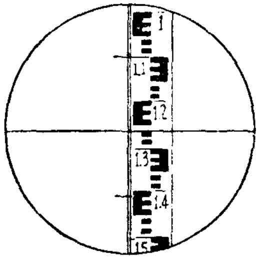


图　4-24

二、水准测量的原理和方法

1．高程　为了定出地面各点的高度，必须预先确定一个起算面，叫做水准面．我国目前采用黄海水平面为水准面．地图上看到的海拔×××米，就是指这点到黄海水平面的垂直距离．如喜马拉雅山的珠穆朗玛峰高出水准面 8882 米，称为海拔 8882 米．又如吐鲁番盆地中部的艾丁湖面低于水准面 154 米，称为海拔 −154 米．地面点对于大地水准面的高度，叫做该点的绝对高程．水准面的绝对高程为零，叫做水准零点．为了便于测量地面各点的绝对高程，国家布设了高程控制网，它有很多水准点组成．每个水准点都由精确水准测量，得出它的绝对高程．

在实际工作中，为了方便，往往假设一个适当的水准面作

为基准，而地面点到假设水准面的垂直距离叫做该点的相对高程.

两点高程的差，叫做这两点的高差.

水准测量的原理是利用水准仪所确定的水平视线来测定两点之间的高差，然后由已知点的高程求得未知点的高程.

2. 测量高程的方法

(1) 近距离两点的测法:

(a) 测量点B对点A的高差：如图 4-25 所示，在与A，B两点大致等距离的地方安置水准仪，并在A和B处分别立水准尺P_A与P_B. 假定水准测量方向由点A向点B进行，那么P_A叫后水准尺，P_B叫前水准尺.

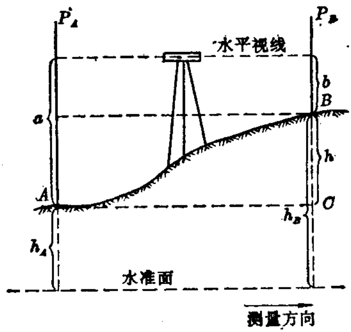


图 4-25

如果从水准仪望远镜中读得P_A上的读数是a(叫后视读数)，P_B上的读数是b(叫前视读数)，那末，点B对点A的高差

$$h=a-b \quad (\text{高差}=\text{后视读数}-\text{前视读数}).$$

(b) 计算点B的高程：如果已知点A的高程是h_A，那末点B的高程$h_B=h_A+h$(未知高程=已知高程+未知点对已知点的高差).

【例 1】 已知$h_A=10.000\,\mathrm{m}$，测得后视读数$a=0.358\,\mathrm{m}$，前视读数$b=1.349\,\mathrm{m}$，求点B的高程.

解：$h_B=h_A+h=h_A+(a-b)$

$$=10.000+(0.358-1.349)=9.009\,\mathrm{m}.$$

(2) 远距离两点的测法：如果 A, B 两点相距很远，或中间有障碍物，或两点的高差较大，可分段测量，如图 4-26 所示．

$$h_1=a_1-b_1,\ h_2=a_2-b_2,\ \cdots,\ h_n=a_n-b_n.$$

点 B 对点 A 的高差

$$\begin{aligned}h&=h_1+h_2+\cdots+h_n\\&=(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_n-b_n),\end{aligned}$$

或 $$h=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(b_1+b_2+\cdots+b_n).$$

这时点 B 的高程也可由公式 $h_B=h_A+h$ 来计算．

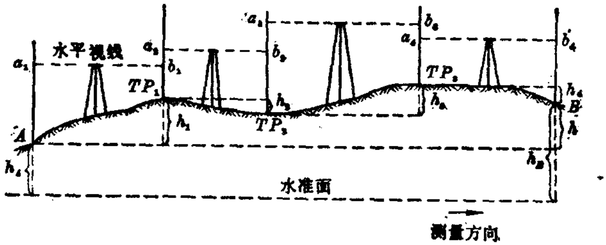


图 4-26

为计算方便，可利用下面表格再求高程：

桩号	后视	前视	高差 +	高差 −	高程	备注
A	a_1				h_A	h_A(已知)
TP_1	a_2	b_1	a_1-b_1			$a_1-b_1>0$ 填入“+”栏
TP_2	a_3	b_2		a_2-b_2		$a_2-b_2<0$ 填入“−”栏
TP_3	a_4	b_3	a_3-b_3			余类推
B		b_4		a_4-b_4	$h_B=h_A+h$ $=h_A+(a_1-b_1)+(a_2-b_2)$ $+(a_3-b_3)+(a_4-b_4)$	$TP_1, TP_2, \cdots$为临时设站，不必求出高程

3. **测量成果的整理和调整** “要过细地做工作。”在测量时，由于各种原因可能产生误差，必须采取一定的措施进行校核，以免给工程建设带来损失.

(1) 计算闭合差：水准测量一般需要连续测出若干个点的高程. 如果测量路线从水准点 A 开始，到水准点 B 结束，就可将计算得到的终点 B 的高程，与点 B 的已知高程进行比较，它们的差叫做闭合差.

如果所测路线只有始点的高程是已知的，那么可从始点测到终点，再由终点测到始点，所得最后一个计算数据与始点的已知高程的差就是闭合差.

(2) 闭合差的调整：如果所计算的闭合差超过允许误差(一般工程测量的允许误差是 $\pm 30\sqrt{L}$ 毫米，其中 L 是所测线路全长的公里数)，那么要进行重测. 如果没有超过允许误差，则可进行调整. 调整的方法是把各测点按距离进行闭合差的分配(叫平差)：

$$\text{各点高程改正数}=\text{闭合差的相反数}\times\frac{\text{累计长度}}{\text{总长度}}.$$

【例 2】 在图 4-27 中，A，B 两点的高程是已知的. 点 A 的高程是 100.013，点 B 的高程是 106.815. 水准测量得 1，2，3，4，5 各点的高程分别为 102.475；104.683；105.360；105.743；106.306；且测得点 B 的高程为 106.831，求闭合差. 如果闭合差在允许范围内，那么进行调整.

解：已知点 B 的高程是 106.815，但测得点 B 的高程是 106.831，所以闭合差是

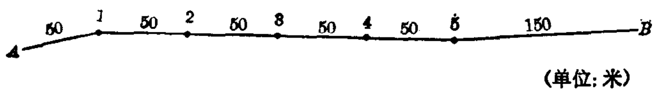


图 4-27

$$106.831-106.815=0.016<30\sqrt{0.4}$$

(这里全长400米即0.4公里).

因此,可进行平差,不必重测.平差计算如下:

点号	距离(累计)	高程	改正数	改正后高程	计算说明
A		100.013	0	100.013	
1	50	102.475	-0.002	102.473	$\frac{-0.016}{400}\times 50=-0.002$
2	100	104.683	-0.004	104.679	$\frac{-0.016}{400}\times 100=-0.004$
3	150	105.360	-0.006	105.354	$\frac{-0.016}{400}\times 150=-0.006$
4	200	105.743	-0.008	105.735	$\frac{-0.016}{400}\times 200=-0.008$
5	250	106.306	-0.010	106.296	$\frac{-0.016}{400}\times 250=-0.010$
B	400	106.831	-0.016	106.815	$\frac{-0.016}{400}\times 400=-0.016$

三、简易水准测量工具

1. **竹筒式水准仪** 这是用竹筒做成望远镜,用眼药水瓶做成水准器,用竹竿做成三脚架,用砂袋整平的土制水准仪(图4-28).

2. **土坝瓴水准仪** 由照准器、水盆和支架(或小凳)组成,如图4-29所示.河南林县长达1300里的红旗渠就曾利用这种水准仪进行测量.

除了上述土制水准仪以外,劳动人民还就地取材,创制了代替水准仪的简易水准测量工具,如连通管、丁字尺、木曲尺等,用来测量两地的高差.

3. **连通管** 它是根据连通管水面等高的道理制成的.水管内装有染色的水(图4-30).

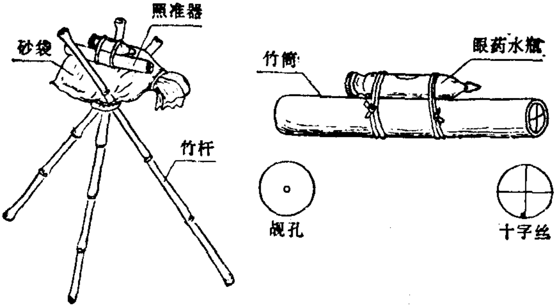


图 4-28

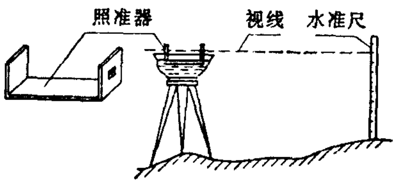


图 4-29

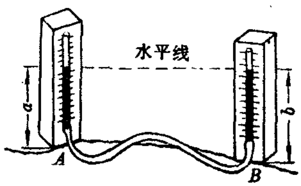
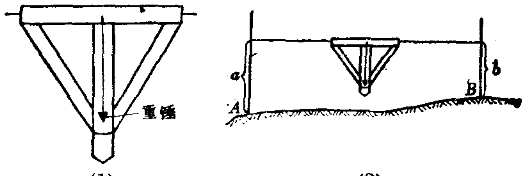


图 4-30

使用时把连通管两底端分别放在测点 A, B 上，然后读出两端玻璃管内水面在标尺上的刻度数．两个读数的差就是两点的高差．这种仪器一般适用于较近距离的测量，例如在筑地基，安装机床等检查是否水平时用．某钢铁厂工人发扬敢想敢说敢做精神，平移大烟囱，在检查烟囱有否倾斜时，用的就是这种连通管．

4．**丁字尺**　利用等腰三角形底边上的中线垂直于底边的性质做成．构造如图 4-31(1)所示．使用时，将丁字尺横杆固定在绳子上，将绳子拉在两标杆之间，如图 4-31(2)所示．当重锤线与直杆中心线重合

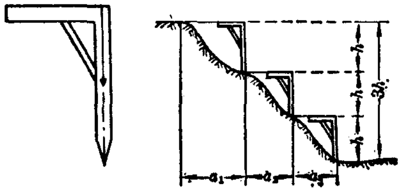


(1)　(2)

图 4-31

时，绳子在两标杆上所截高度 a 与 b 的差，就是两点 A，B 间的高差.

5. **木曲尺** 木曲尺是在弯成直角的曲尺角顶悬挂一重锤而成，如图 4-32(1). 当重锤线与在尺上的铅垂线重合时，横尺必在水平位置. 它可以用来测量高差，还可兼测水平距离，如图 4-32(2)所示. 木曲尺特别适用于测量山地陡坡地段的高差和水平距离.



(1) (2)

图 4-32

四、视 距 测 量

水准仪除了用来进行水准测量外，还可以用来测量距离. 在测绘平面图时要测出两点间的水平距离，如果直接丈量有困难，就可利用水准仪来测量.

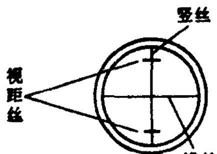


图 4-33

在水准仪望远镜的十字丝玻璃片上，除了长的竖丝、横丝外，还有两根短横丝. 这两根短横丝称为视距丝(图 4-33)，可用来测量两点间的水平距离. 这种测量叫做视距测量. 测量的方法如下：

水准仪放置在水平位置后，在望远镜中读得两视距丝在水准尺上截取的间隔为 R(下丝读数与上丝读数之差)，那么仪器到标尺的水平距离

$$D=100R.$$

如图 4-34，设 O 为物镜，焦距为 f. P 为两视距丝 a_1，b_1

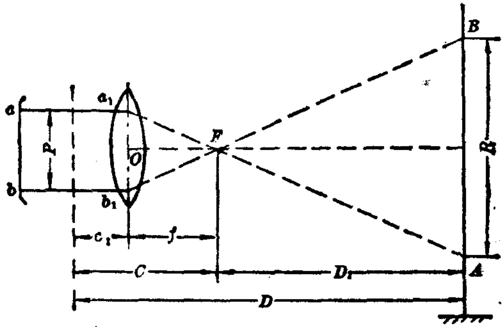


图 4-34

间的距离；R 为两视距丝在水准尺上截取的间隔，即 $R=A$（下丝读数）$-B$（上丝读数）；D 为仪器中心至水准尺的距离；c_1 为物镜至仪器中心的距离；D_1 为焦点到水准尺的距离．下面我们根据这些已知数据来计算 D．

$$\because \quad \triangle ABF \backsim \triangle a_1b_1F,$$

$$\therefore \quad D_1 : f = R : P,$$

即

$$D_1 = \frac{f}{P} \times R.$$

又

$$\because \quad D = D_1 + (f + c_1),$$

$$\therefore \quad D = \frac{f}{P} \times R + (f + c_1).$$

设

$$\frac{f}{P} = K, \quad f + c_1 = C,$$

那么

$$D = KR + C,$$

其中 K 叫做视距常数，C 叫做仪器常数．

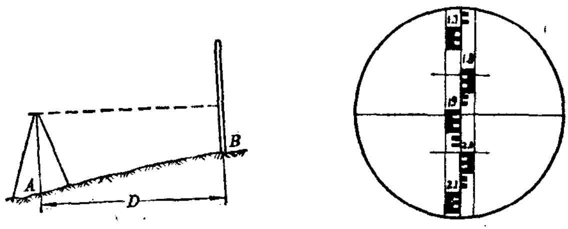
视距常数 K 和仪器常数 C 通常写在仪器说明书上．在内对光望远镜（目镜筒、物镜筒在对光时不伸出望远镜筒）中 C 的值很小，可略去不计．为便于计算，仪器制造时常取

$K=100$. 所以仪器到水准尺的水平距离 $D=100R$.

用这样的方法测量距离，它的精确度为 $\frac{1}{300}$，并且迅速，简便，适宜于远距离的测量.

【例 3】 如图 4-35(1)，将水准仪安置在点 A，水准尺立在点 B，在望远镜十字丝玻璃片上读得上丝读数 $=1.812$ 米，下丝读数 $=2.000$ 米[图 4-35(2)]，求水平距离.

解：$D=100\times R=100\times(2.000-1.812)=18.8(\text{m})$.



(1) (2)

图 4-35

习 题

1. 已知红星大队机口 A 的高程是 3.326 米，准备开挖的渠道由点 A 出发要经过点 B，用水准仪由 A 向 B 测得后视读数 $a=1.363$ 米，前视读数 $b=1.490$ 米，求点 B 的高程.
2. 已知点 A 的高程是 3.667 米，由于 A，B 两点相距较远，我们增设 TP_1，TP_2，TP_3，TP_4 等四个站，用水准仪由 A 向 B 测得后视读数，前视读数分别为：

   $a_1=1.310$, $b_1=1.429$; $a_2=1.442$, $b_2=1.482$;

   $a_3=1.570$, $b_3=1.418$; $a_4=1.428$, $b_4=1.429$;

   $a_5=1.670$, $b_5=0.928$;

   求点 B 的高程.
3. 开挖某河道前进行水准测量，数据如表所示. 已知水准点 A 的高程为 4.393 米，水准点 B 的高程为 3.433 米，水准点 A 到测点 1 点间

的水平距离为130米，测点4到水准点B的水平距离为80米. 1, 2, 3, 4各点相邻两点的距离都是30米. 试计算各点高程并填入表内；检验闭合差是否超过允许误差，若符合调整要求，则进行平差.

桩号	后视读数	前视读数	高差 +	高差 −	高程	备注
水准点A	0.960				4.393	已知
TP_1	1.492	1.722		0.762		
TP_2	1.380	1.462	0.030			
1	1.149	1.492				
2	1.271	1.322				
3	1.363	1.131				
4	1.489	1.490				
水准点B		1.435				已知高程3.433

第三节　兴修小型河道的测量

毛主席教导我们："**水利是农业的命脉**". 要稳产高产，必须做好水利工程，其中兴修河道也是一项重要的工程. 下面我们简单介绍小型河道开挖前后的测量工作.

一、走向、定线

兴修河道首先利用平面图，根据农村的全面规划和有利于农田排灌、河道航行等方面的要求，初步确定河道走向. 为了使开挖的河道走向合理，还必须到实地进行踏勘，了解原有河道的分布、地形的变化以及土质情况等，作出最后决定.

根据走向，在已确定的线路上，从起点开始，每隔一定长度

如30米(也有20米、50米等，根据具体情况而定)打一桩，若地形高低变化较大，或遇旧河道时，必须在高处、低处和旧河道处加桩.

用木桩标出所开河道的位置叫定导线桩. 导线桩的连线叫导线.

在打桩时，要使桩顶与地面相平，并在它的旁边打一副桩，露出地面. 在副桩上用毛笔红漆书写该导线桩到新河道起点的距离，作为该桩的桩号，例如，0+000；0+030；0+064.2；…这里"+"号前面的数字表示公里数，"+"号后面的数字表示不足1公里的米数，如0+064.2，表示该桩离起点64.2米.

在打桩的同时，要把各桩记在如下的桩位表内，以便以后查桩. 表中"位置"栏里应写清桩位的特征.

桩 位 表

桩号	距离(m)	位置	备注
0+000	0	小榆树旁1米	
0+030	30	稻田中	
0+064,2	64.2	离西南沟的第三段稻田中，离东堤岸3米左右	转弯桩
⋮	⋮	⋮	⋮

二、河道纵断面水准测量

纵断面的水准测量，主要是测出河道走向导线上各导线桩处的地面高程，以便知道地面起伏高低变化情况，使新开河河底保持水平，并准确估计工作量. 在用第二节的方法定出测量方向后，顺次测出各导线桩的高程. 但为了多快好省地搞好纵断面水准测量，在视距允许范围内，放置一次水准仪，可

以同时测得几个点的读数. 如图 4-36 中, 水准仪安置在 A 桩、B 桩之间, 可测得 A 桩的后视读数 a, 以及 B, B_1, B_2, B_3 桩的前视读数 b, b_1, b_2, b_3. 我们可以不通过计算高差来求高程, 就是先计算出仪器在测站上的视线高程, 此视线高程也称为仪器高程.

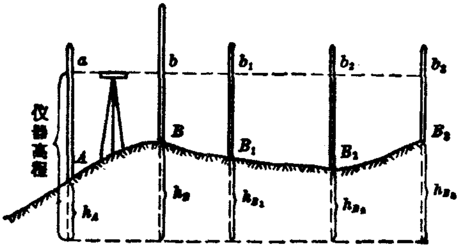


图 4-36

由第二节水准测量原理可知:

$$h_B = h_A + h = h_A + (a - b) = (h_A + a) - b$$

$$= (\text{已知点高程} + \text{后视读数}) - \text{前视读数}.$$

但　　已知点高程(h_A)+后视读数(a)=仪器高程,

所以　未知点高程(h_{B_i})=仪器高程-前视读数(b_i)

$(i=1, 2, 3, \cdots)$.

【例】 (1) 已知 BM 点的高程为 3.528 米, 测得 BM 的后视读数为 1.545 米, 0+000 桩的前视读数为 1.365 米, 计算 0+000 桩的高程.

(2) 在下一测站测量时, 在 0+000 桩处立后视标尺, 测得 0+000 桩的后视读数为 1.490 米, 而 0+030 桩, 0+064.2 桩和 0+090 桩的前视读数分别为 2.079 米, 2.071 米和 2.080 米, 计算这三个桩的高程(图 4-37).

解: (1) 仪器高程 $=3.528+1.545=5.073(\mathrm{m})$;

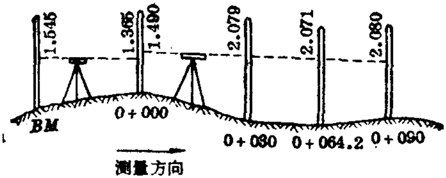


图 4-37

0+000 桩高程=5.073−1.365=3.708(m).

(2) 仪器高程=3.708+1.490=5.198(m);

∴ 0+030 桩高程=5.198−2.079=3.119(m);

0+064.2 桩高程=5.198−2.071=3.127(m);

0+090 桩高程=5.198−2.080=3.118(m).

从这个例题可以看出,如果只放置一次水准仪,同时测得几个桩的前视读数,那么先求出仪器高程,再求各桩高程就比较简便.

上述计算可用表格来完成:

水 准 记 录

桩号	后视	仪器高程	前视		高程	备注
			转点	中间点		
BM	1.545	5.073			3.528(已知)	3.528+1.545=5.073
0+000	1.490	5.198	1.365		3.708	5.073−1.365=3.708 3.708+1.490=5.198
0+030				2.079	3.119	5.198−2.079=3.119
0+064.2				2.071	3.127	5.198−2.071=3.127
0+090				2.080	3.118	5.198−2.080=3.118

注: 1. 如果所测的点在下一测站测量时作为立后视标尺处,那么这点的前视读数填入转点一栏,其他点如果只立前视标尺,不立后视标尺,那么这些点的前视读数填入中间点一栏.

2. 桩号 *BM* 的高程 3.528 是当地水准点的已知高程.

3. 测量时只要记录后视读数与前视读数;仪器高程和未知点高程可在测量结束后在室内计算.

三、河道横断面的设计和测量

1．**河道横断面的设计** 垂直于导线方向的断面叫横断面．新河道横断面一般采用等腰梯形，如图 4-38。

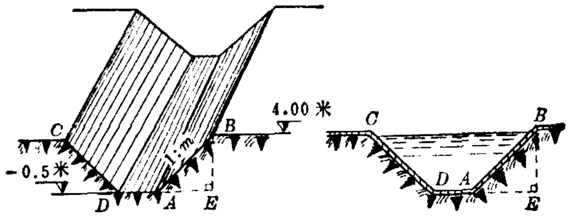


图 4-38

设计河道横断面就是确定新河的河底高程、河底宽及河的坡比．

(1) 河底高程：可根据当地大江河的水位及当地地面的一般高程来确定，使河水保持一定深度，既能满足灌溉航行的需要，又不泛滥造成灾害．如某县地面高程为 4.000 米，当地大江河的水位一般在 1.85～1.7 米，最高不超过 3.000 米，那么河底 DA 高程取 0.000 米或 −0.5 米较为适当．这时需由地面向下挖 4 米或 4.5 米深．

(2) 河底宽：河底宽指河道横断面梯形下底 DA 的宽度．河底宽度应根据当地运输、排灌和战备等方面的要求而定．

(3) 坡比：河道的坡比是指梯形斜边 AB, DC 的倾斜度．它等于地面与河底的高差 EB 与水平距离 EA 的比：$\frac{EB}{EA}$，通常写成 $\frac{1}{m}$ 的形式，即

$$\frac{EB}{EA}=\frac{1}{m},$$

这里，m 是坡比系数.

河道的坡比大小主要根据当地土质来确定，可参考下表：

土质种类	坚硬岩石	软岩或重粘土	粘土或壤土	砂　土
m 值	0～0.5	0.5～1	1.5～2	2～3

2. 河道横断面的水准测量　通过对河道纵断面的水准测量，只能了解河道纵向导线上地面起伏的情况. 为了便于开挖及计算土方，必须了解横向情况. 对于平坦地区的新开部分，可用导线桩的高程近似地代替横向一定距离内各点的高程. 如果导线桩横向地势起伏较大，特别是遇到老河道，那么必须测出横断面各点的地面高程.

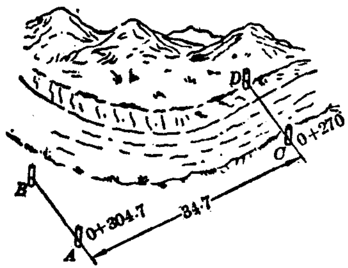


图 4-39

如图 4-39 所示，我们以桩 0+304.7 处的横断面测量，作为新开部分横断面测量的例子；以桩 0+270 处的横断面测量，作为遇到老河道的横断面测量的例子，说明如下：

(1) 新开部分横断面水准测量：从导线桩 A(0+304.7) 出发，拉一根绳尺至点 B（图 4-39. 为说明清楚起见，另表示

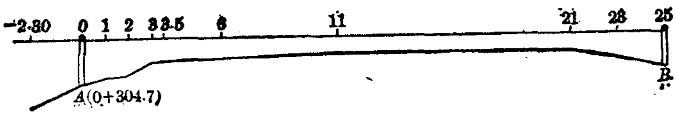


图 4-40

如图 4-40)，然后用水准仪测得这一条线上地形变化处的读数，填入断面测量记录表内．一般测量横断面要比河面宽一些．测量好后，可同样用计算导线桩高程的方法计算每处的高程，填入表中高程一栏，以便画横断面图．例如，根据下表测量数据，可得

$$
\begin{aligned}
\text{仪器高程} &= 3.069+3.100 \\
&= 6.169(\text{m}), \\
\text{离桩 1 米处的高程} &= 6.169-2.88 \\
&= 3.29(\text{m}).
\end{aligned}
$$

余类推．

横断面记录表

桩号 0+304.7　　后视读数 3.100　高程 3.069　仪器高程 6.169

距离	−2.30	0	1	2	3	3.5	6	11	21	23	25
读数	4.09	3.10	2.88	2.80	2.69	2.14	2.03	1.90	1.85	2.20	2.64
高程	2.08	3.07	3.29	3.37	3.48	4.03	4.14	4.27	4.32	3.97	3.53

(2) 夹有老河道的横断面水准测量：把绳尺扣在导线桩点 C(0+270 桩)上，拉到对岸点 D 处(图 4-39, 4-41)．用水准仪测得横断面上高低起伏的特征点及此时的水面 −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 5, …, 11.5 等处的读数，填入横断面记录表中．然后测水深．测水深的人坐在小船上，带测深杆，

图 4-41

每隔1米或2米测一次水深，把数据也填入表中：

横断面记录表

桩号 0+270　　　　后视读数 1.545　高程 4.627　仪器高程 6.172

距离（米）	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	5	6	7
读数	2.43	2.38	2.10	2.04	1.55	1.34	1.29	1.32	1.39	1.40	1.86
高程	3.74	3.79	4.07	4.13	4.63	4.83	4.88	4.85	4.78	4.77	4.31

距离（米）	8	9	10	11.50/水面	12	13	14	15	16	17	18
读数	2.20	2.56	2.87	4.09	0.17	0.15	1.60	1.99	2.09	2.25	2.30
高程	3.97	3.61	3.30	2.08	1.91	1.93	0.48	0.09	−0.01	−0.17	−0.22

距离（米）	19	20	21	22	23	24	25	26	27
读数	2.40	2.45	2.34	1.94	1.45	0.85	0.60	0.35	水面
高程	−0.32	−0.37	−0.26	0.14	0.63	1.23	1.48	1.73	2.08

由于离导线桩11.50米处为水面与河岸交接处，所以写成11.50/水面；27米处也为水面，读数栏中注明“水面”即可.

计算步骤：

(a) 计算旧河道两岸地面高程（方法与计算0+304.7桩处相同）.

(b) 算出11.50/水面处的高程：

$$6.172-4.09=2.082\approx 2.08$$

（27/水面处高程与11.50/水面的高程相同，因为它们在同一水平面上）.

(c) 算出河底各处高程：

河底某处高程＝水面高程－该处河深.

如

离桩 12 米处河底高程$=2.08-0.17=1.91(\mathrm{m})$，

离桩 17 米处河底高程$=2.08-2.25=-0.17(\mathrm{m})$。

四、画横断面图

每一导线桩处的横断面图可画在方格纸上．横断面图包括该导线桩处横断面的地面线与新河横断面的设计线．

我们以 0+270 桩为例，说明横断面图的画法．先画出该桩横断面地面线．

如图 4-42，在方格纸上画上直角坐标系．横坐标代表离开导线桩的距离，纵坐标代表高程．在上表中，距离为 0，高程为 4.63 米的导线桩，在直角坐标系中就是 $A(0, 4.63)$．表中距离为 1 米，高程为 4.83 米的点，就是点 $A_1(1, 4.83)$．同样，表中距离为 -1 米，高程为 4.13 米的点，就是点 $A_1'(-1, 4.13)$．依次类推．我们可在直角坐标系中找出点 $A_2(2, 4.88)$，$A_3(3, 4.85)$，…，$A_2'(-2, 4.07)$，$A_3'(-3, 3.79)$，…，用直尺依次将相邻两点连接起来，就得到 0+270 桩处的横断面地面线的一部分．

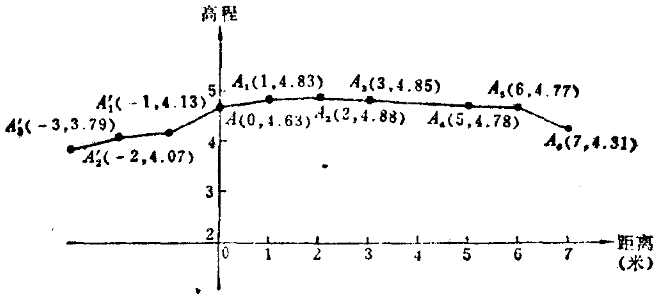


图 4-42

为了便于说明画法，我们在方格纸上画了坐标轴. 一般在画横断面图时，直角坐标系不必画出，只要在方格纸上确定某一横线为零水准，并确定距离的起算点后，即可按纵横坐标相同的比例（一般是 1:100），根据横断面记录表画出横断面地面线. 如图 4-43 的实线，它们是分别按 0+270；0+304.7 横断面记录表的数据画出的横断面地面线.

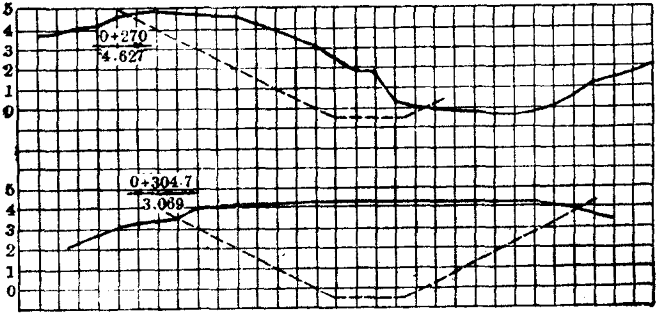


图 4-43

在画出了横断面地面线后，要根据新河的中心位置、新河河底高程、河底宽、坡比，在图中套上新河横断面设计线.

新河中心线的位置可由纵断面导线桩的高程，以及由河底高程、坡比、底宽计算所得横断面的宽来确定. 如导线桩高程是 4.627 米，设计河底高程是 −0.5 米，坡比 1:2，河底宽 3.5 米，那么参阅图 4-38，

$$\because \quad \frac{EB}{EA}=\frac{1}{m},$$

$$\therefore \quad EA=EB\cdot m,$$

而　　　　EB=导线桩高程－河底高程.

因此，　横断面宽=河底宽+2×(导线桩高程－河底高程)

×坡比系数 m

$=3.5+2\times[4.627-(-0.5)]\times2\approx24$(m).

为使开河时不挖去此导线桩(留下导线桩便于检验),中心线取在离此桩水平距离略大于二分之一断面宽处. 这里由计算得横断面宽约 24 米, 中心线即可取在离导线桩 12 米至 13 米的位置. 为了作图方便, 在保证河底中心离桩水平距离大于二分之一断面宽的条件下, 可将河底一端取在方格纸一大方格的边缘(如图 4-44 所示, 图中只在边框上标出方格, 未画出方格线), 即使河底一端离导线桩的水平距离为整数. 河底一端取在离导线桩 C 水平距离 11 米的点 A 上.

中心线位置确定后, 根据设计要求, 在横断面图上离导线桩水平距离 11 米, 高程 -0.5 米的点 A 向右画出宽 3.5 米的河底 AB, 然后根据坡比 1:2 画出 AG 和 BH. 这样就套出了新河的横断面设计线, 如图 4-44 所示.

图 4-43 中的虚线分别表示 0+270, 0+304.7 各桩处横断面的设计线. (一般, 横断面图上横断面设计线也用实线表示, 这里是为了使读者容易区分而用虚线.)

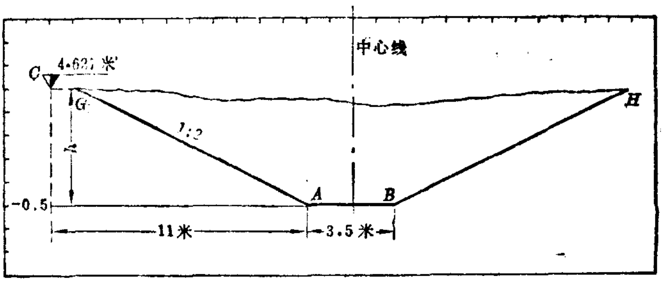


图　4-44

五、土方计算

计算土方时，将整个河道线路按导线桩分成若干段，分别计算各段中的挖方，最后计算各段挖方的和．计算方法举例说明如下：

1. **根据横断面图计算各桩号横断面的挖土面积** 各桩号横断面的挖土面积，就是横断面图中地面线与设计线所围成图形的面积，如图4-45的阴影部分．

图 4-45

(1) 补充法：数横断面图中所测横断面地面线与设计线之间的方格数，不满一格的相互拼起来，大约补足一格．这样可以计算得横断面的挖土面积 F．

例如在图4-43导线桩0+270处的横断面图中，可数得方格数约三十格又三分之一，所以

$$F=30.3(\mathrm{m}^2).$$

(2) 纸条法：量取横断面图中每公尺地面线与设计线间的高度(实际上只需数出方格纸上大方格边框上粗线条的小格数)，相加即得．仍以图4-43中的导线桩0+270处的横断面为例，自左至右，将数得的高度相加(图中未画出小格)，即得

$$\begin{aligned}F&=0.3+0.9+1.3+1.8+2.3+2.7+2.8+2.9\\&\quad+3.1+3.3+3.0+2.4+2.4+0.9+0.3\\&=30.4(\mathrm{m}^2).\end{aligned}$$

我们来看纸条法的原理．

在如图4-46的横断面图中可以看出，地面线与设计线所围成的图形是不规则图形．但是我们又可以看出，方格纸上大方格边框的竖线(图中未画出，在边框上有标记)，将这个截面分成两个近似的三角形和若干个近似的梯形．利用三角

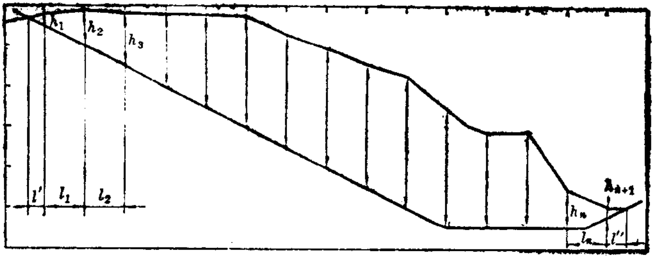


图 4-46

形、梯形的面积公式，可以计算各小块的面积：

$$a'=\frac{1}{2}l'h_1,$$

$$a_1=\frac{1}{2}(h_1+h_2)l_1,$$

$$a_2=\frac{1}{2}(h_2+h_3)l_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2}(h_n+h_{n+1})l_n,$$

$$a''=\frac{1}{2}l''h_{n+1}.$$

由于 $l_1=l_2=l_3=\cdots=l_n=l=1\,(\mathrm{m})$，且可将 l', l'' 也近似地看作为 1 米，所以

$$\begin{aligned} &a'+a_1+a_2+\cdots+a_n+a'' \\ &\approx\frac{1}{2}(h_1+h_1+h_2+h_2+\cdots+h_{n+1}+h_{n+1})l \\ &=h_1+h_2+\cdots+h_{n+1}. \end{aligned}$$

由此可见，导线桩 0+270 的截面积确为

$$h_1+h_2+\cdots+h_{n+1}=0.3+0.9+\cdots+0.3=30.4(\mathrm{m}^2).$$

2. 计算各分段的挖方　当相邻两桩处河道的地面线与设计线所围成图形的形状和面积变化不大时，我们可把要挖去的部分看作一个柱体来计算(图 4-47)．取相邻两个桩号横断面的挖土面积 S_1 和 S_2 的平均数 S 作为柱体的底面积，两导线桩之间的距离 l 作为柱体的高，利用柱体体积公式，得

$$挖方\ V=S\cdot l=\frac{1}{2}(S_1+S_2)l$$

$$=平均断面积\times两横断面间的水平距离（两桩号之差）.$$

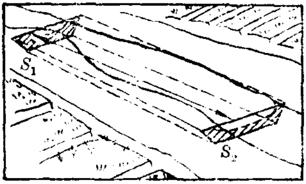


图 4-47

例如

0+270 桩处横断面的挖土面积 $F=30.3(m^2)$，

0+304.7 桩处横断面的挖土面积 $F=57.2(m^2)$，

那么 0+270 桩与 0+304.7 桩之间的挖方为

$$V=\frac{1}{2}(30.3+57.2)\times34.7$$

$$=1518.13(m^3).$$

3. 计算挖方总和　各段挖方总和只要将各段挖方相加即可．为计算方便起见，常常填土方表如下：

土方计算表

桩号	断面积(米²)	平均断面积(米²)	间距(米)	土方(米³)
0+000	58.5			
		55.5	30	1665.0
0+030	52.5			
		50.5	34.2	1727.1
0+064.2	48.5			
		48.5	25.8	1251.3
0+090	48.5			
		47.5	30	1425.0
0+120	46.5			
		47.5	30	1425.0
0+150	48.5			
		30.75	17	522.75
0+167	13			
		7	24	168.0
0+191	1			
		1	19	19.0
0+210	1			
		7.6	20.6	156.56
0+230.6	14.2			
		8.1	9.4	76.14
0+240	2			
		16.15	30	484.5
0+270	30.3			
		43.75	34.7	1518.13
0+304.7	57.2			
		56.6	25.3	1431.98
0+330	56			
⋮	⋮			

六、放样与验收

1. 放样　河道的放样，就是在施工前把河道断面、河道开挖线的位置，按设计所要求的尺寸，在实地上量放出来，以便施工.

放样前，根据设计要求与所画断面图填写好放样表. 下表中假定河道的走向是南北向的.

放样表

桩号	桩高	桩至中心距离	中心挖深	桩距东河边距离	桩至西河边距离	桩至东河底距离	桩至西河底距离
⋮							
0+270	4.627	12.75	2.40	0.50	15.50	11.00	14.50
0+304.7	3.069	12.75	4.80	3	23.5	11.00	14.5
⋮							

放样时，按放样表中桩至中心距离定出河底中心位置. 如放样表中0+270桩至中心距离为12.75，那么用竹片、木桩在离0+270桩水平距离12.75米处打河底中心桩，并在竹片上注明中心挖深数为2.40米. 然后按放样表中桩至东河边、桩至西河边距离，用稻草包填在所确定的河边位置上. 如0+270桩离东河边、西河边分别为0.50米和15.50米，就在离0+270桩东西两边的水平距离为0.50米、15.50米处分别填上草包. 所有东河边、西河边的草包分别连成一线，作为施工时两河岸的开挖线.

2. 验收 新河道开挖后还要检验河道位置，河底高程、坡比是否符合设计要求.

因为河道导线桩还保留在原处，所以可根据导线桩及放样表，检验新开挖的河道位置是否符合要求. 检验河底高程是否符合设计要求，可用水准仪进行测量，也可以用土办法检验. 如导线桩高程是4.000米，设计河底高程是 −0.5米，在标尺4.50米处拴一绳子，绳子另一端固定在导线桩上(如图4-48)，将标尺立于此导线桩处河道横断面的河底中心桩位置

上,观察绳子是否水平. 如果成水平, 说明河底高程是 −0.5 米,符合设计要求.

河的边坡验收,可根据该河坡比制一固定直角三角尺,两条直角边的比就是坡比. 如图 4-49 坡比为 1:2, 那么直角三角尺的一条直角边为 1 米, 另一条直角边为 2 米. 将直角三角尺的斜边放在边坡上,如果重锤线和长 1 米的直角边重合,说明长 2 米的直角边成水平,坡比符合设计要求.

图 4-48

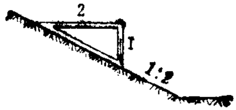


图 4-49

第五章　任意角三角函数

“就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。”在第三章中，我们介绍了锐角三角函数及其在生产实际中的应用．由于生产斗争和科学实验的需要，我们将进一步研究任意角的三角函数，就是把三角函数的意义由锐角推广到一般角，并且把三角形和圆联系起来，进一步考察任意角三角函数的性质．

第一节　任意角三角函数及其线段表示

一、任　意　角

前面我们已经知道，角可以看成是由一条射线绕着它的端点旋转而成的．当射线绕着它的端点旋转一周以上时，就形成大于 $360°$ 的角(图 5-1)．

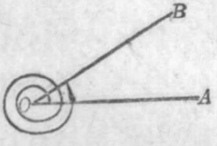


图　5-1

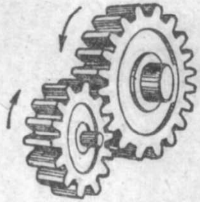


图　5-2

相互啮合的两个齿轮 (图 5-2)，当一个齿轮按逆时针方向旋转一个角时，另一个齿轮就按顺时针方向旋转一个角．

为了正确反映这种客观现象，我们把按相反方向所形成的角加以区别．习惯上规定：按逆时针方向旋转所形成的角是正角，按顺时针方向旋转所形成的角是负角．

为了研究方便，以后如不作特别说明，都以角的顶点作为直角坐标系的原点，角的始边作为 x 轴的正半轴．一个角的终边落在某个象限，就称这个角为某一象限的角．但终边落在 x 轴上或 y 轴上的角，不属于任何象限．例如，$405°$，$150°$，$-120°$，$330°$ 的角分别是第一，第二，第三，第四象限的角（图 5-3）；而 $0°$，$90°$，$-180°$，$-90°$ 等角就不属于任何象限．

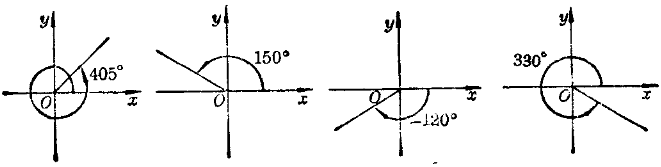


图　5-3

由图 5-4 可知，$45°$ 角、$405°$ 角、$-315°$ 角等有相同的终边．一般地，与任意角 θ 终边相同的角有

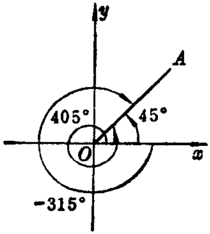


图　5-4

$$1\times360°+\theta,\qquad -1\times360°+\theta,$$
$$2\times360°+\theta,\qquad -2\times360°+\theta,$$
$$3\times360°+\theta,\qquad -3\times360°+\theta,$$
$$\cdots\cdots\qquad\qquad \cdots\cdots$$

因此，所有与角 θ 终边相同的角都可以表示成

$$n\times360°+\theta\quad（n 是整数）.$$

度量角的单位除去第一章中介绍过的度、分、秒以外，常用的还有弧度．

在一个圆中，弧长等于半径 R 的一段弧，它所对的圆心角叫做一弧度的角(图 5-5)。

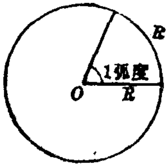


图 5-5

因为 1 周角 $=360°$；又

$$1\text{ 周角}=\frac{2\pi R}{R}=2\pi\text{ 弧度},$$

所以 $\qquad 360°=2\pi$ 弧度.

由此可得

$$1°=\frac{\pi}{180°}\text{ 弧度}\approx 0.017453\text{ 弧度};$$

而

$$1\text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\approx 57.3°\approx 57°18'.$$

用弧度作为量角的单位时，“弧度”两字常常省略不写. 根据上面两个等式，就可以进行两种单位制的换算．例如，

$$60°=\frac{\pi}{180}\times 60=\frac{\pi}{3};$$

$$\frac{7\pi}{4}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}\times\frac{7\pi}{4}=315°.$$

为了应用方便，我们把常见的特殊角的度数和弧度数列表如下：

度	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧 度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

当以弧度作为角 θ 的单位时，所有与 θ 角终边相同的角又可以表示成

$$2n\pi+\theta\quad(n\text{ 是整数}).$$

利用弧度表示角，当圆的半径和圆心角知道时，可以很方

便地求出该圆心角所对的弧长.

因为1弧度的圆心角所对的弧长等于半径 R，所以 θ 弧度所对的弧长 l 是(图 5-6)

$$l=R\theta.$$

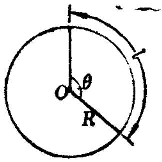


图 5-6

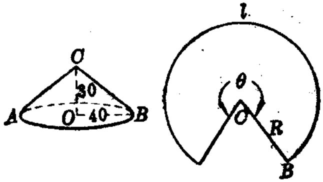


图 5-7

【例 1】 要制作一个高 30 厘米，直径 80 厘米的冲天炉盖(图 5-7)，求落料扇形的半径和圆心角，并计算它的面积.

解：这个炉盖展开后所得扇形的半径 R，就是直角三角形 BOC 的斜边 BC，所以有

$$R=\sqrt{30^2+40^2}=50;$$

扇形的弧长 l 就是锥面底圆的圆周，所以有

$$l=2\pi\times40=80\pi.$$

因此扇形的圆心角

$$\theta=\frac{l}{R}=\frac{80\pi}{50}=\frac{8}{5}\pi.$$

在第一章第五节中我们知道，扇形的面积是

$$S=\frac{n^\circ}{360^\circ}\cdot\pi R^2,$$

n° 是圆心角的度数. 这里圆心角是弧度，所以扇形面积公式是

$$S=\frac{\theta}{2\pi}\cdot\pi R^2=\frac{1}{2}R^2\theta,$$

以 $\theta=\dfrac{l}{R}$ 代入，还可得

$$S=\frac{1}{2}R^2\frac{l}{R}=\frac{1}{2}Rl.$$

我们用后面一个公式，得落料扇形面积是

$$S=\frac{1}{2}\times 50\times 80\pi=6280(\mathrm{cm}^2)\approx 0.63(\mathrm{m}^2),$$

即落料扇形的半径是 50 厘米，它的圆心角是 $\dfrac{8}{5}\pi$，面积是 0.63 平方米.

【例 2】 圆锥工件斜角计算的近似公式.

我们在第三章第一节中学习农机零件加工计算时已经知道，车床车削圆锥工件，小拖板转动的角度应当等于圆锥的斜角 α，并用下式来计算：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{D-d}{2L}.$$

可是，车工一般计算斜角 α 时，常采用下面的近似公式：

$$\alpha\approx 28.7^\circ\times\frac{D-d}{L}.$$

这是为什么呢？

我们知道，在半径 $R=1$ 的圆内，弧长 l 与弧所对的圆心角 α（弧度）间存在关系（图 5-8）：

$$l=R\alpha=1\times\alpha=\alpha.$$

在 $\triangle OAT$ 中，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{AT}{OA}=\frac{AT}{1}=AT.$$

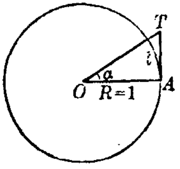


图 5-8

弧 l 是曲线，AT 是直线．但在角 α 很小的情况下，它们可以

看成是一回事，于是就有

$$\alpha(\text{弧度})\approx \operatorname{tg}\alpha.$$

$$\therefore\quad \alpha(\text{弧度})\approx\frac{D-d}{2L}.$$

当采用“度”作为斜角的度量单位时，就得

$$\alpha=57.3^\circ\times\alpha(\text{弧度})\approx 57.3^\circ\times\frac{D-d}{2L}$$

$$=28.7^\circ\times\frac{D-d}{L}.$$

这就是所要证明的近似公式．这个近似公式只适用于 α 在 6° 以下，否则误差较大．

为了减少误差，当 α 在 $1^\circ\sim13^\circ$ 之间时，可采用下列近似公式：

$$\alpha=\text{常数}\times\frac{D-d}{L}.$$

式中的常数按下表选择：

$\frac{D-d}{L}$	0.00～0.06	0.06～0.12	0.12～0.24	0.24～0.48
常　数	29°	28.8°	28.6°	28.4°

如果已知圆锥的大头直径 $D=24\,\text{mm}$，小头直径 $d=20\,\text{mm}$，长度 $L=32\,\text{mm}$，那么

$$\frac{D-d}{L}=\frac{24-20}{32}=0.125,$$

查上表常数应取 28.6°，于是要加工这一工件，

小拖板转动角度 $\alpha=28.6^\circ\times0.125$

$$=3.575^\circ=3^\circ35'.$$

练习

1. 下列各角在第几象限内？它们与 0° 到 360° 中的哪一个角有相同

的终边？并作出图形：

$$530°,\quad -1000°,\quad \frac{7}{3}\pi,\quad -\frac{5}{6}\pi.$$

2. 设飞轮直径是 1.2 米，每分钟转 300 次，求：

(1) 飞轮每秒钟转过的圆心角；

(2) 飞轮圆周上一点每秒钟所转过的弧长；

(3) 飞轮旋转一周需几秒钟.

$\left[1.\ 170°,\ 80°,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{7}{6}\pi.\ \ 2.\ (1)\ 10\pi, (2)\ 6\pi \text{ 米}, (3)\ 0.2 \text{ 秒}.\right]$

二、任意角的三角函数

偏心驱动机构是机械中常见的一种使圆周运动转化为直线运动的装置. 它的结构是在轮盘 O 上装一固定的滑块 A（图 5-9），这滑块可以在 BC 槽内活动. BC 槽上固定连接了一个柱塞 D. 当轮盘 O 转动时，滑块 A 跟着转动，并通过 BC 槽带动柱塞 D 上下移动.

设滑块 A 和轮盘中心成水平位置时为开始状态. 当主动轮按逆时针方向转过角度 θ 时，滑块 A 跟着转过相同的角度，柱塞 D 就跟着 BC 槽上移. 当 $\theta=90°$ 时，柱塞 D 上移到

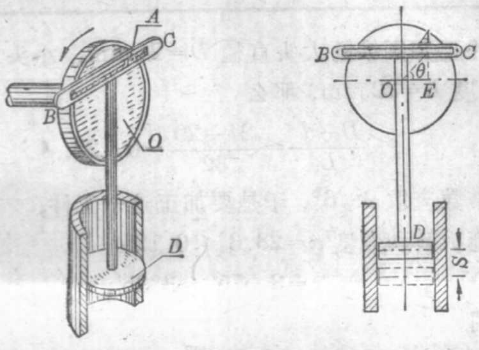


图 5-9

最高位置，轮盘继续转动，柱塞 D 就开始下移．当 $\theta=180°$ 时，D 下移到开始时的位置．当 $\theta=270°$ 时，D 下移到最低位置．轮盘转一周，BC 槽又回到开始时的位置．如果轮盘继续转动，D 就重复上述过程．

从图 5-9 可以看出，柱塞 D 的位移 S，就是滑槽 BC 上下移动的位移 EA．当滑块转过一个锐角 θ 时，在直角三角形 OAE 中

$$EA=OA\sin\theta, \quad 即 \quad S=OA\sin\theta.$$

当 $\theta>90°$ 时，不再存在含有角 θ 的直角三角形．但是柱塞 D 的位移 S 与角 θ 的依赖关系还是存在．由于要解决这类实际问题，必须将三角函数的概念加以推广．

"普遍性即存在于特殊性之中"．锐角是任意角的特殊情况，为了研究任意角的三角函数，我们先在直角坐标系中研究锐角三角函数．

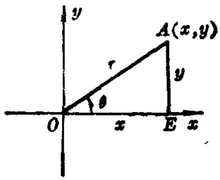


图 5-10

如图 5-10 所示，把直角三角形 OEA 的顶点 O 作为直角坐标系的原点，以直角边 OE 为 x 轴的正向，那么锐角 θ 的三角函数，与点 A 的坐标 (x, y) 及点 A 到原点的距离 r 之间的关系是

$$\sin\theta=\frac{EA}{OA}=\frac{y}{r},$$

$$\cos\theta=\frac{OE}{OA}=\frac{x}{r},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{EA}{OE}=\frac{y}{x}.$$

我们看到，锐角三角函数也可以用锐角 θ 的终边上任

意一点的坐标和原点到这点的距离来定义. 这种用点的坐标的比来定义锐角三角函数的方法，可以用来定义任意角的三角函数.

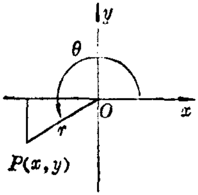


图 5-11

假设 $P(x, y)$ 是任意角 θ 的终边上任意一点(图 5-11), r 是 P 和原点 O 的距离, 它大于 0. 我们把

比值 $\frac{y}{r}$ 称为角 θ 的正弦，记作 $\sin\theta$:

$$\sin\theta=\frac{y}{r}.$$

比值 $\frac{x}{r}$ 称为角 θ 的余弦, 记作 $\cos\theta$:

$$\cos\theta=\frac{x}{r}.$$

比值 $\frac{y}{x}$ 称为角 θ 的正切, 记作 $\operatorname{tg}\theta$:

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}.$$

比值 $\frac{x}{y}$ 称为角 θ 的余切, 记作 $\operatorname{ctg}\theta$:

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{x}{y}.$$

比值 $\frac{r}{x}$ 称为角 θ 的正割, 记作 $\sec\theta$:

$$\sec\theta=\frac{r}{x}.$$

比值 $\frac{r}{y}$ 称为角 θ 的余割, 记作 $\csc\theta$:

$$\csc\theta=\frac{r}{y}.$$

这里 $r^2=x^2+y^2$.

下面我们来讨论各个象限内角的三角函数的符号.

对正弦 $\sin\theta=\frac{y}{r}$ 来说，当角 θ 在第一、第二象限内时，$y>0$；当角 θ 在其余两个象限内时，$y<0$. 所以 $\sin\theta$ 在第一、第二象限内取正值，而在其余两个象限内取负值.

同样的道理，$\cos\theta$ 在第一、第四象限内取正值，而在其余两个象限内取负值. $\operatorname{tg}\theta$(和 $\operatorname{ctg}\theta$)在第一、第三象限内取正值，而在其余两个象限内取负值.

三角函数在各个象限内的符号列表如下：

三角函数 \ 象限	I	II	III	IV
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\theta$	+	−	+	−

$\operatorname{ctg}\theta$，$\sec\theta$，$\csc\theta$ 在各个象限内的符号，请读者自己列表.

【例 3】 已知角 $360°<\theta<720°$，它的终边经过点 $P(-5,\ -12)$，求角 θ 的三角函数值(图 5-12).

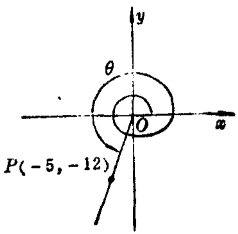


图 5-12

解：$\because\ x=-5\quad y=-12$,

$\therefore\ r=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}$
$=13.$

$$\therefore\quad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{-12}{13}=-\frac{12}{13},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{-5}{13}=-\frac{5}{13},$$

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{-12}{-5}=\frac{12}{5};$$

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{x}{y}=\frac{-5}{-12}=\frac{5}{12}.$$

【例 4】 已知 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，并且 $90°<\theta<180°$，求出 θ 角的其他三角函数的值.

解：因为 $\sin\theta=\frac{4}{5}$，所以可取 $r=5$，$y=4$；θ 又在第二象限内，x 为负，因而求得

$$x=-\sqrt{r^2-y^2}=-\sqrt{5^2-4^2}=-3.$$

即在角 θ 的终边上有一点 $P(-3, 4)$，如图 5-13. 根据任意角三角函数的定义，得

$$\cos\theta=-\frac{3}{5},\quad \operatorname{tg}\theta=-\frac{4}{3},\quad \operatorname{ctg}\theta=-\frac{3}{4}.$$

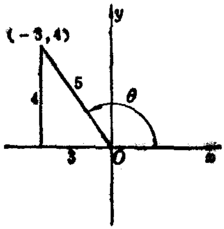


图 5-13

练习

1. 根据下列条件，分别确定角 θ 所在的象限：

(1) $\sin\theta<0$，$\cos\theta>0$； (2) $\sin\theta>0$，$\operatorname{tg}\theta<0$；

(3) $\cos\theta<0$，$\operatorname{ctg}\theta>0$。

2. 已知 $\operatorname{ctg}\theta=1$，且 $\cos\theta<0$，求 $\operatorname{tg}\theta$ 和 $\sin\theta$.

[1. (1) 在第四象限，(2) 在第二象限，(3) 在第三象限.
2. $\operatorname{tg}\theta=1$，$\sin\theta=\frac{-\sqrt{2}}{2}$.]

三、三角函数的线段表示

我们知道，三角函数值与点 P 在终边上的位置无关. 有时为了方便起见，我们可取 OP 的长为 1 个单位长度.

在直角坐标系中，以原点为圆心，1 个单位长为半径画圆. 这个圆叫做单位圆.

如图 5-14 所示，单位圆和 x 轴的正向交于点 A，和 y 轴的正向交于点 B，和角 θ 的终边交于点 P. 由点 P 作 x 轴的垂线，交 x 轴于点 M. 我们把图 5-14 中的线段 MP 和 OM 都看成是带有符号的线段，由 x 轴向上为正，向下为负；由 y 轴向右为正，向左为负. 这样就有

$$\sin\theta=\frac{MP}{OP}=\frac{MP}{1}=MP,$$

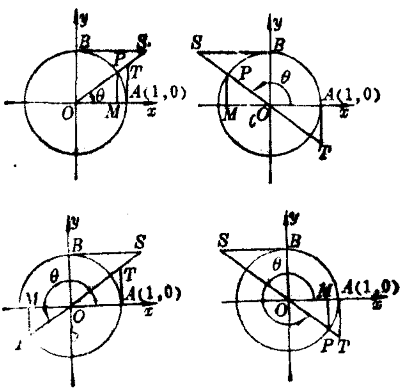


图 5-14

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{OM}{1} = OM.$$

再过点 A 和点 B 各作单位圆的切线. 它们分别与角 θ 的终边 OP 或 OP 的反向延长线相交于点 T 和点 S.

由于 $\triangle OMP \backsim \triangle OAT$, 依据相似三角形的原理, 所以又得到

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{MP}{OM} = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = AT,$$

同理, 由 $\triangle OMP \backsim \triangle SBO$, 可得

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{OM}{MP} = \frac{BS}{OB} = \frac{BS}{1} = BS.$$

这里 AT 和 BS 仍是带有符号的线段, 正负号的规定同前

线段 MP, OM, AT 和 BS 分别叫做角 θ 的正弦线、余弦线、正切线和余切线. 它们总起来叫做三角函数线. 任意角的三角函数值都可以用三角函数线来表示.

正如恩格斯所指出的, **"三角形不再被孤立地只从它本身来考察, 而是和另一种图形, 和圆形联系起来考察。……这样一来, 边和角便得到了完全不同的、特定的相互关系, 如果不把三角形和圆这样联系起来, 这些关系是决不能发现和利用的。"**

四、三角函数值的变化

用单位圆中的线段表示三角函数, 可以形象地反映出三角函数值的变化规律.

在图 5-15(1) 的单位圆中, 当角 θ 的终边从始边 OA 的位置出发, 经过 OP_1, OP_2 等位置, 旋转到 OB 的位置时, 角 θ 从 0 逐渐增加到 $\frac{\pi}{2}$. 这时, 正弦线 MP 就相应地从 0 逐渐增加

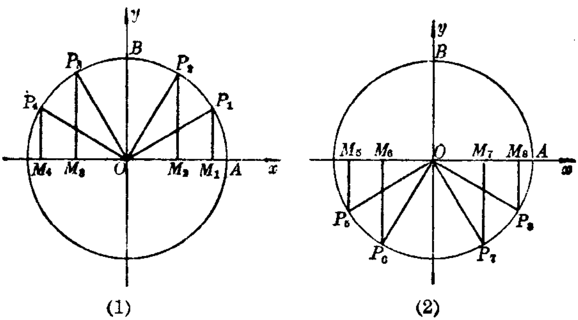
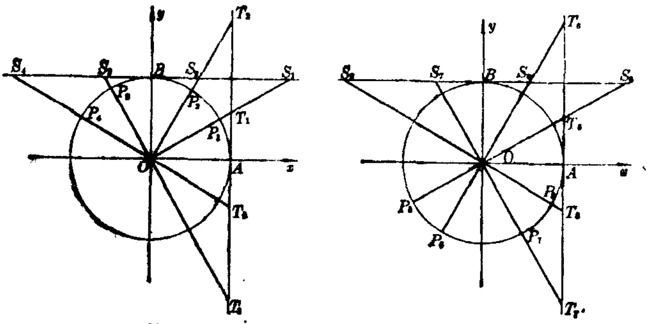


图 5-15

到1(从0到M_1P_1，M_2P_2，一直到OB)；而余弦线OM就相应地从1逐渐减小到0．当角θ从$\frac{\pi}{2}$逐渐增加到π时，正弦线MP就相应地从1逐渐减小到0，而余弦线OM就相应地从0逐渐减小到-1．

又在图5-15(2)中可以看到，当角θ继续从π增加到$\frac{3\pi}{2}$，2π时，正弦线MP就相应地从0逐渐减小到-1，再逐渐增加到0；而余弦线OM相应地从-1逐渐增加到0，再逐渐增加到1．

对于正切函数来说，从图5-16(1)可以看出，当角θ由0增加到$\frac{\pi}{2}$时，正切线AT的长相应地由0逐渐增加．在OP充分接近OB的时候，AT可以无限增长．但是在OP到达OB的时候，OP与从A所引单位圆的切线没有交点，AT也就不存在．当OP越过OB的位置，即当角θ变得大于$\frac{\pi}{2}$时，正切线AT变为向下，因而表示负值．随着角θ从$\frac{\pi}{2}$增加到π，正切线AT由负值逐渐增加到0．



(1)　　　　　　　　　　(2)

图　5-16

同样可以在图 5-16(2) 中看到，当角 θ 继续从 π 增加到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，正切线 AT 先从 0 逐渐增大，而当 $\theta=\frac{3}{2}\pi$ 时，正切线不存在，然后随着角 θ 的继续增大到 2π，正切线 AT 又从负值逐渐增加到 0.

请读者根据图 5-16，指出当角 θ 由 0 变到 2π 时，余切线 BS 的变化规律.

上面的结果可列成下表：

θ	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\sin\theta$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0
$\cos\theta$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1
$\mathrm{tg}\,\theta$	0	↗	不存在	↗	0	↗	不存在	↗	0
$\mathrm{ctg}\,\theta$	不存在	↘	0	↘	不存在	↘	0	↘	不存在

表中向上的箭头表示逐渐增大，向下的箭头表示逐渐减小。

【例 5】　化简

$$p^2\sin\frac{\pi}{2}-2pq\cos 0-q^2\cos\pi+p\,\mathrm{tg}\,0-q\,\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{2}.$$

解：原式$=p^2\cdot1-2pq\cdot1-q^2(-1)+p\cdot0-q\cdot0$
$=p^2-2pq+q^2=(p-q)^2.$

练习

1. 求值：$3\sin\frac{3\pi}{2}-\frac{4\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\pi}+5\,\mathrm{tg}\,\pi-6\,\mathrm{ctg}\,\frac{3\pi}{2}.$
2. $|\cos\theta|\leqslant1$，$|\sin\theta|\leqslant1$，为什么对于 θ 的任何值都是对的？
[1.1.]

五、任意角三角函数值的求法

我们已经知道，从三角函数表可以查得 $0°\sim90°$ 间角的三角函数值．现在角的范围扩大了，如果我们能把 $0°\sim90°$ 以外的角的三角函数，转化为 $0°\sim90°$ 范围内的角的三角函数，那么任意角的三角函数值都能从三角函数表中求得了．为此，我们将研究任意角三角函数和锐角三角函数间的关系．

如图 5-17 所示，在直角坐标系中，作任一锐角 θ，然后在第二、第三、第四象限内，分别作出角$(180°-\theta)$，$(180°+\theta)$，$(360°-\theta)$，它们的终边与单位圆分别交于 P_1，P_2，P_3，P_4．由直角三角形 $\triangle OMP_1\cong\triangle OM'P_2\cong\triangle OM'P_3\cong\triangle OMP_4$ 可知，MP_1，$M'P_2$，$M'P_3$，MP_4 相等，OM，OM' 相等．根据三

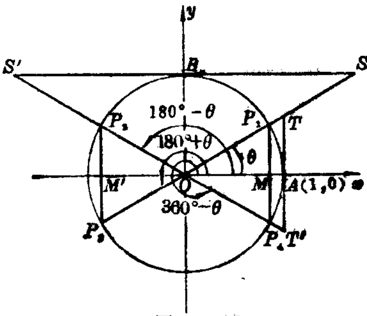


图 5-17

角函数的线段表示(注意它们的符号),可得

$$\sin(180^\circ-\theta)=M'P_2=MP_1=\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=OM'=-OM=-\cos\theta.$$

类似地,可得

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\theta)=AT'=-AT=-\operatorname{tg}\theta,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\theta)=BS'=-BS=-\operatorname{ctg}\theta.$$

这样,我们便得到角 $(180^\circ-\theta)$ 与角 θ 的三角函数间的关系式:

$$\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\theta)=-\operatorname{tg}\theta,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\theta)=-\operatorname{ctg}\theta.$$

类似地,当考察角$(180^\circ+\theta)$与角 θ,角$(360^\circ-\theta)$与角 θ 的关系时,相应地又各有一组关系式:

$$\sin(180^\circ+\theta)=-\sin\theta,$$

$$\cos(180^\circ+\theta)=-\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ+\theta)=\operatorname{tg}\theta,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ+\theta)=\operatorname{ctg}\theta.$$

和

$$\sin(360^\circ-\theta)=-\sin\theta,$$

$$\cos(360^\circ-\theta)=\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ-\theta)=-\operatorname{tg}\theta,$$

$$\operatorname{ctg}(360^\circ-\theta)=-\operatorname{ctg}\theta.$$

由三角函数的定义可知,终边相同的角的三角函数值是相同的,就是说,对于任意整数 n,都有

$$\sin(n\cdot 360^\circ+\theta)=\sin\theta,$$

$$\cos(n\cdot 360^\circ+\theta)=\cos\theta,$$

$$\operatorname{tg}(n\cdot 360^\circ+\theta)=\operatorname{tg}\theta,$$

$$\operatorname{ctg}(n\cdot 360^\circ+\theta)=\operatorname{ctg}\theta.$$

因 $(-\theta)$ 与 $(360^\circ-\theta)$ 是终边相同的角，所以又有下面一组关系式：

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta,$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta,$$
$$\operatorname{tg}(-\theta)=-\operatorname{tg}\theta,$$
$$\operatorname{ctg}(-\theta)=-\operatorname{ctg}\theta.$$

上面五组公式都属于诱导公式，它们连同第三章第一节中所讲的 $(90^\circ-\theta)$ 的一组公式，对任意角 θ 都适用.

利用诱导公式，任意角的三角函数就可以化为 $0^\circ\sim 90^\circ$ 间的角的三角函数．具体步骤如下：

1．把任意负角的三角函数，利用负角公式化为正角的三角函数；

2．把正角的三角函数，利用 $(n\cdot 360^\circ+\theta)$ 的公式，化为 $0^\circ\sim 360^\circ$ 间的角的三角函数；

3．把 $0^\circ\sim 360^\circ$ 的角的三角函数，利用 $(180^\circ-\theta)$，$(180^\circ+\theta)$，$(360^\circ-\theta)$ 的公式，化为 $0^\circ\sim 90^\circ$ 间的角的三角函数.

这样，任意角的三角函数值都可在三角函数表中查得了.

【例 6】 求 135°，240° 和 330° 的余弦值.

解：$\cos 135^\circ=\cos(180^\circ-45^\circ)=-\cos 45^\circ=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；

$$\cos 240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2};$$

$$\cos 330^\circ=\cos(360^\circ-30^\circ)=\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

【例 7】 求 $\operatorname{ctg}(-1655^\circ)$.

解：$\operatorname{ctg}(-1655^\circ)=-\operatorname{ctg}1655^\circ=-\operatorname{ctg}(4\times 360^\circ+215^\circ)$

$$=-\operatorname{ctg}215^\circ=-\operatorname{ctg}(180^\circ+35^\circ)$$

$$=-\operatorname{ctg} 35° = -1.4281.$$

【例 8】 从偏心驱动机构的示意图(图 5-9)可知，柱塞 D 的位移 S，随着滑块 A 转动的角 θ 的运转规律是

$$S=OA\sin\theta.$$

如果 $OA=50\,\text{mm}$，当滑块 A 转过的角度 θ 为 $851°48'$ 时，柱塞 D 移动的距离是多少？

解：$S=50\sin 851°48'=50\sin(2\times 360°+131°48')$

$$=50\sin 131°48'=50\sin(180°-48°12')$$

$$=50\sin 48°12'=50\times 0.7455\approx 37.28\ (\text{mm}).$$

即当滑块 A 转过 $851°48'$ 时，柱塞 D 向上移动了 37.28 毫米.

练习

求值： (1) $\cos 318°24'$； (2) $\sin(-886°18')$；

(3) $\operatorname{tg}(-700°)$； (4) $\operatorname{ctg}(1.25\pi)$.

[(1) 0.7478, (2) -0.2368, (3) 0.3640, (4) 1.]

六、同角三角函数间的关系

同一个角的各个三角函数之间，是有着内部联系的．设 $P(x, y)$ 为角 θ 的终边与单位圆的交点，根据三角函数线段表示（图 5-18），有

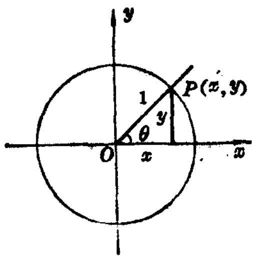


图 5-18

$$\sin\theta=y,\quad \cos\theta=x.$$

从勾股定理得：$x^2+y^2=1$，

$$\therefore\quad \cos^2\theta+\sin^2\theta=1. \qquad (1)$$

以 $\cos^2\theta$ 除(1)式的两边，就有

$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta};$$

即

$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta.$$

以 $\sin^2\theta$ 除(1)式的两边，就有

$$1+\operatorname{ctg}^2\theta=\frac{1}{\sin^2\theta},$$

即 $$1+\operatorname{ctg}^2\theta=\csc^2\theta.$$

再根据正切和余切的定义，又有

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{x}{y}=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \tag{3}$$

从(2)和(3)立即得

$$\operatorname{tg}\theta\operatorname{ctg}\theta=1.$$

从正割函数与余割函数定义，同样可以得到

$$\sin\theta\csc\theta=1,$$

$$\cos\theta\sec\theta=1.$$

利用同角三角函数间的关系，当已知一角的某个三角函数值时，可以求出这个角的其他三角函数值.

【例 9】 已知 $\cos\theta=-\frac{4}{5}$，又 θ 的终边在第二象限内，求 θ 的其他三角函数值.

解：因为 θ 的终边在第二象限内，所以 $\sin\theta$ 取正值.

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5};$$

而 $$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta}=-\frac{4}{3}.$$

【例 10】 已知 $\operatorname{tg}\theta=2$, 求 $\dfrac{4\cos\theta-\sin\theta}{2\cos\theta+3\sin\theta}$ 的值.

解: 如果先从 $\operatorname{tg}\theta=2$, 求出 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 的值, 把它们代入原来的式子, 那就会带进根式, 计算很繁. 我们把问题中的式子化为只含有正切函数的式子, 再代入 $\operatorname{tg}\theta$ 的已知值:

$$\frac{4\cos\theta-\sin\theta}{2\cos\theta+3\sin\theta}=\frac{\dfrac{4\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}{\dfrac{2\cos\theta+3\sin\theta}{\cos\theta}}=\frac{4-\operatorname{tg}\theta}{2+3\operatorname{tg}\theta}$$

$$=\frac{4-2}{2+3\times 2}=\frac{1}{4}.$$

利用同角三角函数间的关系, 可以验证某些三角函数关系式是否成立.

【例 11】 证明: $\dfrac{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$.

证: 左边 $=\dfrac{\sin^2\alpha\operatorname{cso}^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=\sec^2\alpha$,

$\therefore$ 左边 = 右边.

【例 12】 船只造成后要沿滑道下水. 下水前, 在船架和滑道间涂上润滑脂, 如果它们间的摩擦系数是 0.05, 那么滑道的倾斜角应不小于多少度, 才能使船舶自由下滑?

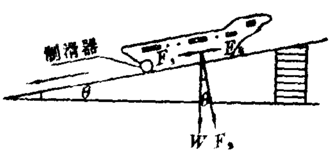


图 5-19

解: 如图 5-19 所示, 假设滑道的倾斜角为 θ, 船和船架的重量为 W, 那么重力沿滑道的分力是

$$F_1=W\sin\theta.$$

垂直于滑道的分力是

$$F_2=W\cos\theta.$$

而船架和滑道之间的摩擦力是

$$F_3=0.05F_2=0.05W\cos\theta.$$

要保证船自由下滑，就必须 $F_1\geqslant F_3$，即

$$W\sin\theta\geqslant 0.05W\cos\theta.$$

因为 $\cos\theta>0$，用 $W\cos\theta$ 除两边，得

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\geqslant 0.05,$$

也就是 $$\operatorname{tg}\theta\geqslant 0.05.$$

$$\therefore\quad \theta\geqslant 2°52'.$$

即滑道的倾斜角最小应该是 $2°52'$.

练习

1．已知 $\sin\theta=-\dfrac{8}{17}$，$\theta$ 是第四象限的角，求 θ 的其他三角函数的值.

2．已知 $\operatorname{tg}\theta=2$，求 $\dfrac{1}{1-\sin\theta}+\dfrac{1}{1+\sin\theta}$ 的值.

3．化简 $(\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta)\sin\theta\cos^2\theta$.

4．证明：$\dfrac{1-2\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta-\cos^2\theta}=\dfrac{\operatorname{tg}\theta-1}{\operatorname{tg}\theta+1}$.

[1．$\cos\theta=\dfrac{15}{17}$，$\operatorname{tg}\theta=-\dfrac{8}{15}$，$\operatorname{ctg}\theta=-\dfrac{15}{8}$．2．10．3．$\cos\theta$.]

小　　结

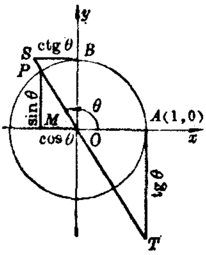
1．度量角的大小，角度制以“度”为单位，弧度制以“弧度”为单位．它们可以相互换算：

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{ 弧度},\quad 1\text{ 弧度}=\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

2．在半径为 R 的圆内，圆心角 θ 和它所对的弧长 l 的关系是：

$$l=R\theta\quad(\theta\text{ 的单位是弧度}).$$

3．三角函数值可以分别用单位圆中的线段来表示，列表于下：

<table>
<tr><th>例　　图</th><th>三角函数线</th><th>位　　置</th></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>正弦线 MP</td><td>角 θ 的终边与单位圆交点 P 的纵坐标线段</td></tr>
<tr><td>余弦线 OM</td><td>角 θ 的终边与单位圆交点 P 的横坐标线段</td></tr>
<tr><td>正切线 AT</td><td>角 θ 的终边(或它的反向延长线)与过 A 所作单位圆切线的交点 T 的纵坐标线段</td></tr>
<tr><td>余切线 BS</td><td>角 θ 的终边(或它的反向延长线)与过 B 所作单位圆切线的交点 S 的横坐标线段</td></tr>
</table>

利用三角函数线，我们能够形象地掌握三角函数值随角的变化而变化的规律。

4．利用 $(180°\pm\theta)$，$(360°-\theta)$，$(n\cdot 360°+\theta)$，$(-\theta)$ 等五组诱导公式，可以把任意角的三角函数化为 $0°\sim 90°$ 间的角的三角函数。

5．同角三角函数间的关系是

(1) 平方关系

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,$$
$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta,$$
$$1+\operatorname{ctg}^2\theta=\csc^2\theta.$$

(2) 比值关系

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta},$$
$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}.$$

(3) 倒数关系

$$\operatorname{ctg}\theta=\frac{1}{\operatorname{tg}\theta},$$
$$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta},$$
$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta}.$$

习 题

1. 确定下列式子的符号：

(1) $\cos 259^\circ \sin 850^\circ$；　　(2) $\cos 290^\circ \operatorname{tg} 190^\circ$；

(3) $\dfrac{\sin 1}{\operatorname{ctg} 2}$.

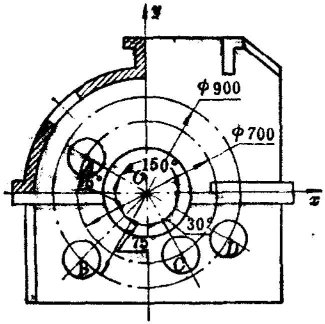
2. 求值：

(1) $(1+\sin 135^\circ+\sin 30^\circ)(1-\cos 45^\circ-\cos 240^\circ)$；

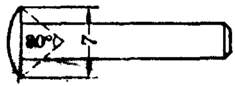
(2) $\cos\dfrac{3\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{2\sin\dfrac{\pi}{3}}{\cos\dfrac{\pi}{6}}-\sin 0\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}}{\cos\dfrac{\pi}{3}}$；

(3) $\dfrac{\sin(\pi+\theta)}{\cos(\pi-\theta)}-\dfrac{\operatorname{ctg}(-\theta)}{\operatorname{ctg}(\pi-\theta)}+\operatorname{tg}(\pi-\theta)+\cos\theta$.

3. 如图所示是粉碎机壳的一个视图．试根据图上尺寸，求 A, B, C, D 四孔中心的坐标.

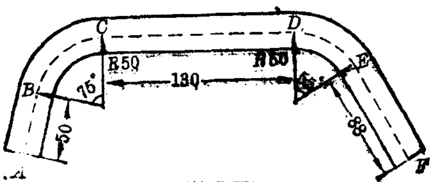


(第 3 题)



(第 4 题)

4. 已知一只铆钉的钉头弧所对的圆心角是 80°，弧两端间的距离是 7 毫米，求钉头弧的长.



(第 5 题)

5．计算图中管子的长（单位是毫米）．

6．军事上常用一种叫密位制的量角制，即把圆周分成6000等分，每一等分的弧所对的圆心角叫做1密位，并用符号"⁻"表示，写在数字的右上角，例如185密位记成185^{-}．

(1) 试导出密位制与角度制的换算公式；

(2) 如果在半径为R的圆上，一段弧所对的圆心角为n^{-}，导出弧长l的近似公式（取$\pi=3$）

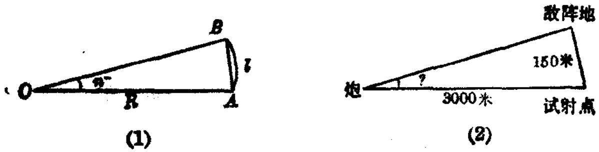
$$l=\frac{nR}{1000};$$

(3) 在附图(1)中，当$\angle AOB$不大时，用弦AB的长代替$\overset{\frown}{AB}$的长．实际测量中，把AB叫做间隔，R叫做距离，又得到下面的公式：

间隔（米）＝角度（密位）×距离（公里），

试说出它的根据；

(4) 民兵侦察员发现在试射点旁有"敌"重机枪一挺，间隔为150米．试射点距我阵地3000米．为了消灭"敌人"，大炮需要转动多少密位［附图(2)］？



（第6题）

7．已知单相交流电瞬时值是

$$I=I_m\sin(\omega t+120^\circ),$$

其中最大电流$I_m=2$安培，角频率$\omega=50\times360^\circ/$秒，求$t=0.24$秒时$I$的值．

8．设$\theta=\dfrac{\pi}{10}$，计算$\dfrac{2\sin\theta\cos\theta-\cos\theta}{1+\sin^2\theta-\cos^2\theta-\sin\theta}$．

9．证明：

(1) $(a\sin\theta+b\cos\theta)^2+(a\cos\theta-b\sin\theta)^2=a^2+b^2$；

(2) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)\sin\alpha\cos^2\alpha=\cos\alpha$．

第二节　复角三角函数

从第一节里，我们知道$(180°+\theta)$和$(180°-\theta)$的三角函数可以用θ的三角函数来表示．那么任意两角α与β的和与差的三角函数，是否可用α和β的三角函数来表示呢？毛主席教导我们："**研究任何过程，如果是存在着两个以上矛盾的复杂过程的话，就要用全力找出它的主要矛盾。**"为此，我们先讨论两角差的余弦公式，再推导其他的结果．

一、和 角 公 式

两角α与β的差的余弦，显然不等于两个角的余弦的差．

$$\cos(180°-90°)=\cos 90°=0,$$

$$\cos 180°-\cos 90°=-1-0=-1,$$

所以$\cos(180°-90°)\neq\cos 180°-\cos 90°$．

那么，$\cos(\alpha-\beta)$究竟怎样用α和β的单角三角函数来表示呢？

两角差的余弦公式是：

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

下面我们来导出这个公式．

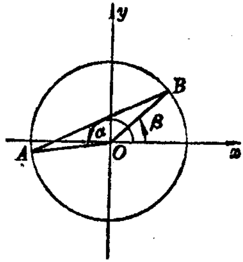


图　5-20

如图 5-20 所示，角α和β的终边与单位圆分别交于点A和点B．那么，点A的坐标是$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，点$B$的坐标是$(\cos\beta,\ \sin\beta)$．由两点间的距离公式，得

$$AB^2=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

$$
\begin{aligned}
&=\cos^2\alpha-2\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta+\sin^2\alpha\\
&\quad-2\sin\alpha\sin\beta+\sin^2\beta\\
&=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\beta+\cos^2\beta\\
&\quad-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\\
&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta).
\end{aligned}
$$

由余弦定理得

$$
\begin{aligned}
AB^2&=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\angle AOB\\
&=1+1-2\times1\times1\cos(\alpha-\beta)\quad(\text{在单位圆中，}OA=OB=1)\\
&=2-2\cos(\alpha-\beta).
\end{aligned}
$$

比较上面两个等式的右边，立即有

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta. \tag{1}$$

这就是两角差的余弦公式。

因 $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$，所以

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta)&=\cos[\alpha-(-\beta)]\\
&=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\\
&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.
\end{aligned}
$$

即

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta. \tag{2}$$

这就是两角和的余弦公式.

【例 1】 不查表利用公式(1)求 $\cos15^\circ$ 的值.

解：
$$
\begin{aligned}
\cos15^\circ&=\cos(45^\circ-30^\circ)\\
&=\cos45^\circ\cos30^\circ+\sin45^\circ\sin30^\circ\\
&=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}
$$

练习

1. 利用公式(1)化简 $\cos 65^\circ \cos 20^\circ + \sin 65^\circ \sin 20^\circ$。

2. 不查表求 $\cos 75^\circ$ 的值.

$\left[1.\ \frac{\sqrt{2}}{2}.\ 2.\ \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.\right]$

从 $(90^\circ-\theta)$ 与 θ 的三角函数关系,我们知道

$$\sin\theta=\cos(90^\circ-\theta).$$

令

$$\theta=\alpha-\beta,$$

$$\begin{aligned}\sin(\alpha-\beta)&=\cos[90^\circ-(\alpha-\beta)]\\&=\cos[(90^\circ-\alpha)+\beta]\\&=\cos(90^\circ-\alpha)\cos\beta-\sin(90^\circ-\alpha)\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

即
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta. \tag{3}$$

类似地,从 $\alpha+\beta=\alpha-(-\beta)$ 可以得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \tag{4}$$

(1), (2), (3) 与 (4) 四个公式统称为和角公式.

特别地,当 $\alpha=\beta$ 时,公式(2)与(4)将成为

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \tag{5}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha. \tag{6}$$

因为 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$, 所以公式(5)还可写成下面的形式:

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha&=2\cos^2\alpha-1\\&=1-2\sin^2\alpha.\end{aligned} \tag{7}$$

(5), (6) 和 (7) 都称为倍角公式.

【例 2】 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, 求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ 和 $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ 的值.

解：$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

同样可得 $$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

这种用α和β的正切表示$\alpha+\beta$和$\alpha-\beta$的正切的式子，也属于和角公式.

把 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{3}$ 代入上式，便得

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}}{1-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}}=1;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}}{1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}}=\frac{1}{7}.$$

【例 3】 设θ是第二象限的角，又$\cos\theta=-0.6$，求$\cos 2\theta$和$\sin 2\theta$.

解：$\because$ θ是第二象限的角，$\therefore$ $\sin\theta>0$.

由 $\cos\theta=-0.6$，得

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-(-0.6)^2}=0.8.$$

因此，

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2(-0.6)^2-1=-0.28;$$

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times0.8(-0.6)=-0.96.$$

【例 4】 图5-21是两个伞齿轮作啮合转动的示意图．这两个伞齿轮的齿数是60和20，它们的轴线 OO_1，OO_2 与啮合处的交线 OA 在同一平面上，两轴相交的角是75°．求两伞齿轮的节锥角 α_1 和 α_2.

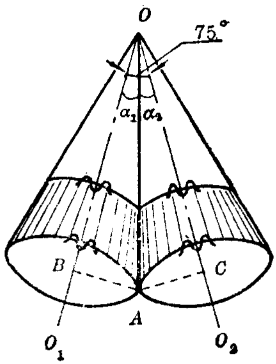


图 5-21

解：图中以 B 为圆心，BA 为半径的圆 B，和以 C 为圆心，CA 为半径的圆 C，都表示节圆．在传动时，一个齿轮的节圆转过一段弧，另一个齿轮的节圆也应转过等长的圆弧．因为 B 圆和 C 圆的齿数的比是 $\frac{60}{20}=3$，所以它们的半径的比 $\frac{BA}{CA}=3$.

$$\sin\alpha_1=\frac{BA}{OA},\quad \sin\alpha_2=\frac{CA}{OA},$$

$$\therefore\quad \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}=\frac{BA}{CA}=3,$$

于是
$$\sin\alpha_1=3\sin\alpha_2.$$

已知 $\alpha_1+\alpha_2=75°$，所以

$$\sin\alpha_1=3\sin(75°-\alpha_1)$$
$$=3(\sin 75°\cos\alpha_1-\cos 75°\sin\alpha_1).$$

两边除以 $\cos\alpha_1$，得

$$\operatorname{tg}\alpha_1=3\sin 75°-3\cos 75°\operatorname{tg}\alpha_1,$$

因而
$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{3\sin 75°}{1+3\cos 75°}=\frac{3\times 0.9659}{1+3\times 0.2588}$$
$$=\frac{2.8977}{1.7764}\approx 1.6312.$$

$\therefore\quad \alpha_1=58°29'$,

$\alpha_2=75°-58°29'=16°31'$.

就是说，这两个伞齿轮的节锥角分别是 $58°29'$ 和 $16°31'$.

【例 5】 化下列三角函数式为两角和的正弦的形式：

(1) $\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha$； (2) $5\sin\alpha-12\cos\alpha$.

解：(1) 依据题意，就是要找到一个角 β，使得

$$\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sin(\alpha+\beta),$$

或是 $$\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

比较等式的两边，可以看出，只要找到一个同时满足

$$\cos\beta=\frac{1}{2},\quad \sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

的角 β 就行了．很明显，$\beta=\frac{\pi}{3}$ 适合这个等式．因此

$$\frac{1}{2}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha=\sin\alpha\cos\frac{\pi}{3}+\cos\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$

$$=\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right).$$

(2) 由于 $|\cos\beta|\leqslant1$，$|\sin\beta|\leqslant1$，所以 5 和 -12 不能直接看作是一个角的余弦和正弦．但是，我们可以把 $(5,\ -12)$ 看作是某一个角 β 的终边上一点 P 的坐标（图 5-22）．点 P 到原点的距离为

$$\sqrt{5^2+(-12)^2}=13.$$

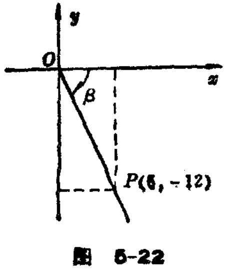


图 5-22

由三角函数定义，得

$$\cos\beta=\frac{5}{13},\ \sin\beta=-\frac{12}{13},$$

可知β是第四象限的角. 所以

$$\beta=-67°23'.$$

于是,

$$\begin{aligned}5\sin\alpha-12\cos\alpha&=13\left(\frac{5}{13}\sin\alpha-\frac{12}{13}\cos\alpha\right)\\&=13[\sin\alpha\cos(-67°23')\\&\quad+\cos\alpha\sin(-67°23')]\\&=13\sin(\alpha-67°23').\end{aligned}$$

一般地, $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ 都可以化为 $A\sin(\alpha+\beta)$ 的形式. 先把(a, b)看作是某一个角β终边上一点的坐标, 求出这点到原点的距离 $r=\sqrt{a^2+b^2}$. 由

$$\sin\beta=\frac{b}{r},$$

$$\cos\beta=\frac{a}{r}$$

决定β所在的象限, 并求得β. 于是

$$\begin{aligned}a\sin\alpha+b\cos\alpha&=r\left(\frac{a}{r}\sin\alpha+\frac{b}{r}\cos\alpha\right)\\&=r(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

练习

1. 化简:

(1) $\sin 23°\cos 7°+\cos 23°\sin 7°$.

(2) $\cos(\alpha-2\pi)\cos(2\pi-\beta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$.

(3) $\dfrac{\operatorname{tg}70°+\operatorname{ctg}10°}{1-\operatorname{tg}70°\operatorname{ctg}10°}$

(提示: $\operatorname{ctg}10°=\operatorname{tg}80°$).

2. 证明:

(1) $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$. (2) $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

3. 把 $\sqrt{2}(\cos\alpha-\sin\alpha)$ 化为 $A\sin(\alpha+\beta)$ 的形式.

4. 两台并联运行的发电机,它们输出的电流分别是

$$I_1=20\sin(\omega t+60^\circ),\quad I_2=10\sin(\omega t-30^\circ).$$

那么通过负载的电流为 $I=I_1+I_2=22.3\sin(\omega t+33^\circ 20')$. 为什么?

(提示: 先把 I_1+I_2 化为 $18.7\sin\omega t+12.3\cos\omega t$, 再依例 5 变换.)

$\left[1. (1)\ \dfrac{1}{2};\ (2)\ \cos(\alpha-\beta);\ (3)\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}.\ 3.\ 2\sin(\alpha+135^\circ).\right]$

二、和、差化积公式

把和角公式中的(2)与(1)两边相加与相减,分别得

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta;$$

$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta.$$

再把(4)与(3)的两边相加与相减,又得到

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

这四个等式是把两角余弦的和或差以及正弦的和或差化为乘积的变换.

为便于使用,令 $\alpha+\beta=\theta$, $\alpha-\beta=\varphi$. 把这两式对应相加和相减,那就有

$$\alpha=\frac{\theta+\varphi}{2},\qquad \beta=\frac{\theta-\varphi}{2}.$$

用 $\alpha+\beta=\theta$, $\alpha-\beta=\varphi$, $\alpha=\dfrac{\theta+\varphi}{2}$, $\beta=\dfrac{\theta-\varphi}{2}$ 代入上面四个等式,就得到如下的四个和、差化积公式:

$$\cos\theta+\cos\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}, \tag{8}$$

$$\cos\theta-\cos\varphi=-2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}, \tag{9}$$

$$\sin\theta+\sin\varphi=2\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\frac{\theta-\varphi}{2}, \tag{10}$$

$$\sin\theta-\sin\varphi=2\cos\frac{\theta+\varphi}{2}\sin\frac{\theta-\varphi}{2}. \tag{11}$$

【例 6】 化简：(1) $\cos 75^\circ-\cos 15^\circ$；

(2) $\sin(60^\circ+\beta)-\cos(30^\circ+\beta)$.

解：(1) 由公式(9)，得

$$\begin{aligned}\cos 75^\circ-\cos 15^\circ&=-2\sin\frac{75^\circ+15^\circ}{2}\sin\frac{75^\circ-15^\circ}{2}\\&=-2\sin 45^\circ\sin 30^\circ\\&=-2\times\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

(2) 在使用和、差化积公式时，如果遇到互余函数，那么应该先用诱导公式把原式化为同名函数.

$$\begin{aligned}&\sin(60^\circ+\beta)-\cos(30^\circ+\beta)\\&=\sin(60^\circ+\beta)-\sin[90^\circ-(30^\circ+\beta)]\\&=\sin(60^\circ+\beta)-\sin(60^\circ-\beta)\\&=2\cos\frac{(60^\circ+\beta)+(60^\circ-\beta)}{2}\sin\frac{(60^\circ+\beta)-(60^\circ-\beta)}{2}\\&=2\cos 60^\circ\sin\beta=2\times\frac{1}{2}\sin\beta=\sin\beta.\end{aligned}$$

【例 7】 三相交流发电机中的三个绕组接成星形（图 5-23），其中 U_{AO}，U_{BO} 是相电压（每相绕组的电压），U_{AB} 是

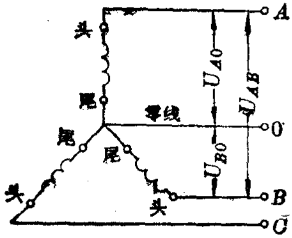


图 5-28

线电压(二根火线间的电压). 已知相电压

$$U_{A0}=U_m\sin\omega t,\qquad U_{B0}=U_m\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right),$$

求线电压 $U_{AB}=U_{A0}-U_{B0}$.

解: $U_{AB}=U_{A0}-U_{B0}$

$$=U_m\sin\omega t-U_m\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=U_m\left[\sin\omega t+\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\omega t\right)\right]$$

$$=U_m\left[2\sin\frac{\omega t+\frac{2}{3}\pi-\omega t}{2}\cos\frac{\omega t-\frac{2}{3}\pi+\omega t}{2}\right]$$

$$=2U_m\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}\,U_m\cos\left(\frac{\pi}{3}-\omega t\right)$$

$$=\sqrt{3}\,U_m\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right).$$

上式说明了线电压是相电压的 $\sqrt{3}$ 倍, 当相电压为 220 伏时, 线电压便为 $\sqrt{3}\times220=380$(伏).

练习

1. 求 $\dfrac{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 70^\circ + \cos 10^\circ}$ 的值.

2. 证明: $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

$\left[1.\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}.\right]$

三、复角三角函数在测量上的应用

1. 视线倾斜时, 水平距离和高差的测定 在第四章第二节中, 已介绍过利用水准仪望远镜的视距丝测定距离的方法. 当望远镜处于水平位置时, 如果视距丝在水准尺上截取的间隔为 R, 那么仪器到水准尺的水平距离是

$$D = 100R.$$

这个公式只适用于望远镜处于水平位置, 也就是垂直于水准尺的情况.

由于地势的高低起伏, 在实际测量中, 经常遇到视线倾斜的情况, 就是说, 只有当望远镜在倾斜位置时, 才能看见水准尺.

如图 5-24 所示, 求 M, N 两点间的水平距离 D 时, 视线 GP 与水准尺 NQ 不垂直, 视线的仰角是 α, 视距丝在 NQ 上截得的间隔 $AB = R$. 现在我们设想把水准尺转到与视线 GP 垂直的位置, 并设这时的视距间隔 $A'B' = R'$.

在 $\triangle APA'$ 和 $\triangle BPB'$ 中,

$$\angle APA' = \angle BPB' = \alpha,$$

$$\angle AA'P = 90^\circ - \omega,$$

$$\angle BB'P = 90^\circ + \omega,$$

其中 $\omega = \dfrac{1}{2}\angle AGB$. 由于人目瞄准上下视距丝时, 两视线间的夹角 $\angle AGB$ 很小, 所以 ω 可以略去不计, 于是 $\angle AA'P$ 和

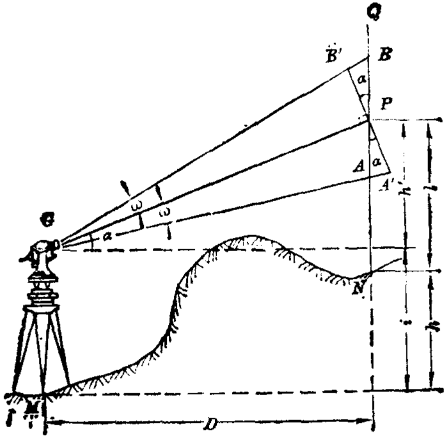


图 5-24

$\angle BB'P$ 可以近似地看做直角．这样就有

$$A'P = AP\cos\alpha, \quad B'P = BP\cos\alpha,$$

$$A'B' = A'P + B'P = (AP + BP)\cos\alpha = AB\cos\alpha,$$

就是
$$R' = R\cos\alpha.$$

因而
$$GP = 100R' = 100R\cos\alpha,$$

于是，MN 两地间的水平距离是

$$D = GP\cos\alpha = 100R\cos^2\alpha.$$

要计算 M，N 两地间的高差 h，从图 5-24 可以看出

$$h = h' + i - l,$$

但
$$h' = GP\sin\alpha = 100R\sin\alpha\cos\alpha = 100R\frac{\sin 2\alpha}{2},$$

$$\therefore \quad h = 100R\frac{\sin 2\alpha}{2} + i - l.$$

这里，i 是仪器高度，l 是十字丝横线截水准尺上的读数．为了简化计算，在瞄准水准尺时，可使 $l = i$，这样便得到

$$h = 100R\,\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

2. 渠道施工前的边桩放样　修筑渠道前，需要把渠道横断面的设计线和地面线的交点 e, f [图 5-25(1)] 在实地上用边桩标定出来，作为从两边向中央挖土的起点. 这项工作叫做边桩放样.

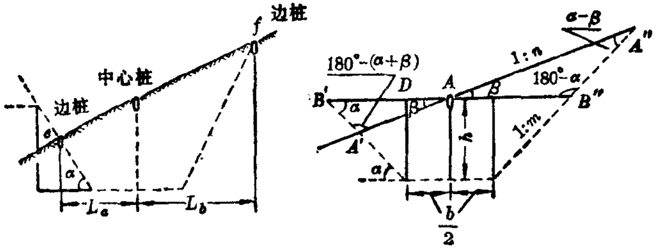
边桩离开中心桩的水平距离 L_a, L_b 可以用图解法在横断面图上量得. 放样时，沿横断面方向，直接量取水平距离 L_a 和 L_b 而得 e, f 两点，打下边桩. 对于山地或丘陵地区，量取水平距离有困难时，边桩位置可以用下面所讲的计算方法求得.

我们已经知道，斜坡的坡比等于坡面的倾斜角 α 的正切，常写成

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{m},$$

即坡比系数　　　　$m = \operatorname{ctg}\alpha.$

渠道的横断面常采用等腰梯形. 在图 5-25(2) 中，渠道横断面的底宽为 b，深为 h，坡比系数为 m，边坡的倾斜角为 α，地面的倾斜角为 β，边桩的位置在 A', A'' 两点.



(1)　　　　(2)

图 5-25

在 $\triangle AA'B'$ 和 $\triangle AA''B''$ 中，AA' 和 AA'' 是边桩与中心桩间的倾斜距离.

$$\because \quad AB' = AB'' = AD + DB' = \frac{b}{2} + h\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{2} + mh,$$

$$\angle AA'B' = 180^\circ - (\alpha+\beta),\ \angle AB''A'' = 180^\circ - \alpha,$$

$$\angle AA''B'' = \alpha - \beta,$$

因此，在 $\triangle AA'B'$ 中，由正弦定理得

$$\frac{AA'}{\sin\alpha} = \frac{AB'}{\sin[180^\circ - (\alpha+\beta)]},$$

即

$$AA' = \left(\frac{b}{2} + mh\right)\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

在 $\triangle AA''B''$ 中，同样得

$$AA'' = \left(\frac{b}{2} + mh\right)\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

从此可知，只要测得地面的倾斜角 β，就可以计算 AA' 和 AA''.

为了计算时避免查三角函数表，还可以把这些公式化简.因为

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

$$= \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta} + \dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sin\beta}}{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} + \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}} = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\beta + 1}}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha},$$

如果把地面坡比记成 $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{n}$，那么 $\operatorname{ctg}\beta=n$，再由于 $\operatorname{ctg}\alpha=m$，所以有

$$AA'=\left(\frac{b}{2}+mh\right)\frac{\sqrt{n^2+1}}{n+m}.$$

类似的，又有

$$AA''=\left(\frac{b}{2}+mh\right)\frac{\sqrt{n^2+1}}{n-m}.$$

当地面倾斜角小于 20° 时，分子 $\sqrt{n^2+1}$ 和 n 相差不大，因此，我们还可以利用下面的近似公式，计算边桩的倾斜距离：

$$AA'\approx\left(\frac{b}{2}+mh\right)\frac{n}{n+m},$$

$$AA''\approx\left(\frac{b}{2}+mh\right)\frac{n}{n-m}.$$

在定出各个断面的边桩以后，把相邻断面的边桩用白灰线连起来，这就是渠道的开挖线。

小　结

1. 和角公式：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

2. 倍角公式:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

3. 和差化积公式:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

4. 复角三角函数在测量上应用较多，如视线倾斜时，计算水平距离和高差的公式分别是:

$$D=100R\cos^2\alpha,\quad h=100R\frac{\sin 2\alpha}{2}.$$

其中 R 是两视距丝在水准尺上截取的间隔，α 是视线的仰角. 100 是仪器常数.

又如渠道放样前，计算边桩倾斜距离的公式是:

$$AA'\approx\left(\frac{b}{2}+mh\right)\frac{n}{n+m},\quad AA''\approx\left(\frac{b}{2}+mh\right)\frac{n}{n-m}.$$

其中 b 是渠道横断面的底宽，h 是渠深，m 是渠道坡比系数，n 是地面坡比系数.

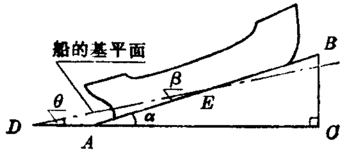
习　　题

1. 求值:

(1) 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，$\cos\beta=\frac{4}{5}$，并且 α 和 β 都是第四象限的角. 求 $\cos(\alpha-\beta)$ 和 $\sin(\alpha+\beta)$;

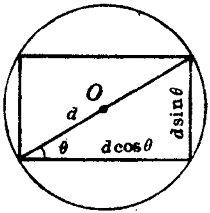
(2) 已知 $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$，$\operatorname{tg}\beta=1\frac{7}{8}$，并且 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，$\pi<\beta<\frac{3\pi}{2}$，求 $\cos(\alpha+\beta)$.

2. 倾斜船底运输船，在船台上建造时，需要计算船的基平面和地平面的夹角的正切．已知运输船底和船的基平面 DE 的夹角的正切 $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{25}$，船台和地平面 AC 的夹角的正切 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{17}$，求船的基平面和地平面的夹角的正切 $\operatorname{tg}\theta$.

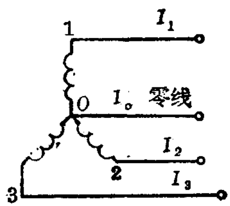


（第 2 题）

3. 要从直径为 d 的圆形材料截出长方形来，怎样截法才能使长方形的面积最大？



（第 3 题）



（第 4 题）

4. 三相交流发电机的三个绕组接成星形．假设三相交流电的电流瞬时值分别是：

$$I_1=I_m\sin\omega t,$$

$$I_2=I_m\sin\left(\omega t+\frac{2}{3}\pi\right),$$

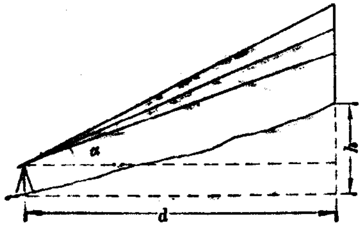
$$I_3=I_m\sin\left(\omega t+\frac{4}{3}\pi\right).$$

求在任何瞬时通过零线的合电流 $I_0=I_1+I_2+I_3$ 的值.

5. 灯泡的电功率 P 等于它的电压和电流的积，由已知灯泡的电压是 $U_m\sin\omega t$，电流是 $I_m\sin\omega t$，导出

$$P=\frac{1}{2}U_mI_m(1-\cos 2\omega t).$$

6. 在一次测量中，由于地形的需要，水准仪只能作倾斜测量．如果上视距丝对准水准尺上 1.27 米，下视距丝对准水准尺上 3.09 米，视距轴线的仰角是 28°，求测点和目标间的水平距离 d 和高差 h.



(第 6 题)

第六章　一次函数和直线

第一节　函　　数

一、常量和变量

毛主席教导我们："**无论什么事物的运动都采取两种状态，相对地静止的状态和显著地变动的状态。**"反映在数量上，也存在着相对静止的量和不断变化的量．例如，某生产队广大贫下中农通过批林批孔运动，发挥了冲天的革命干劲，在三夏战斗中，争取时间及时把割下来的小麦运到打麦场脱粒．在运麦的过程中，小麦总量可以看成是不变的量，而麦田里的麦子的数量和打麦场上的麦子的数量都在发生变化（图 6-1）．

图　6-1

我们把某一运动过程中，数值保持不变的量叫常量，可以取不同数值的量叫变量．例如，建造南京长江大桥的潜水工人，打破资产阶级技术"权威"视为不可超越的"警戒线"，潜入

水深 45 米以下进行作业．在潜水过程中，必须掌握压强随着水的深度而变化的规律，水越深，压强越大．实践证明，物体在水下所受的压强 P(吨/米^2)与水下深度 h(米)有如下关系：

$$P=D\cdot h,$$

其中 D(吨/米^3)是水的比重，它可以认为是不变的，是常量；而水深 h 和压强 P，就是变量．

常量与变量是相对的，是对于某一个研究过程来说的．因此要区分常量与变量，必须对于具体情况作具体的分析．同一个量在某一个变化过程中是常量，在另一个变化过程中也可能是变量．例如，在匀速运动中，速度是常量，但研究变速运动时，速度就是变量．有的量在某一问题的研究过程中，变化微小，根据实际问题的需要，可以作为常量来处理．如上例中不同深度的水的比重，严格讲是不同的，但由于变化微不足道，我们总把它看作常量．

练习

1．举出几个常量和变量的实例．

2．指出下列各式中的常量和变量：

(1) 在第一章中我们已知道，圆周长 C 和它的半径 R 之间的关系式是

$$C=2\pi R.$$

(2) 某生产队对早稻施追肥，平均每亩施肥田粉 25 斤，那么 x 亩和所需肥田粉的总量 y 斤之间的关系式是

$$y=25x.$$

二、函数概念

1．*什么是函数* “每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。”在运动过程中，各种变量不是彼此孤立的，而是相互联系、相互依存的．从上面的例子我们

可以看到，水下压强随着水的深度的变化而变化．下面我们再从几个例子来分析变量之间的依存关系．

(1) 某拖拉机开始翻地时，油箱内有油36公斤．在翻地过程中，每小时要耗油6公斤，那么经过 t 小时，就要耗油 $6t$ 公斤，油箱中的剩油量为 $(36-6t)$ 公斤．如用 q 表示油箱中的剩油量，就有

$$q=36-6t.$$

从这个关系式中可以看到，剩油量 q 随时间 t 的变化而变化．t 取每一个可能的值，q 的值就由这个关系式随之而确定．例如，当 $t=2$（小时）时，$q=24$（公斤）；$t=3$（小时）时，$q=18$（公斤）……．这个式子刻划了存在于剩油量 q 和时间 t 这两个变量之间的依存关系．

(2) 掌握江河的流水变化规律，是与农业生产密切相关的．某地水文站测得某条河水位与流量之间的数量关系如下表所示：

水位 H(米)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	4	5	6
流量 Q(米^3/秒)	0	17	40	62	85	115	180	282	447

从表中可以看出，流量 Q 随水位 H 的变化而变化，当水位 H 为一个确定的值时，流量 Q 也随着有一个确定的值，如水位 H 为3米时，流量 Q 为115米^3/秒．上面的表刻划了流量 Q 与水位 H 这两个变量之间的依存关系．

(3) 图6-2表示某地初冬某天的气温变化情况．从图中可以看出，气温 T 随时间 t 的变化而变化的规律：对每一个确定的时间 t，就有一个确定的温度 T 和它对应．例如 $t=16$ 时，温度 $T=18°C$．这条曲线刻划了存在于温度 T 和时间 t 这两个变量之间的依存关系．

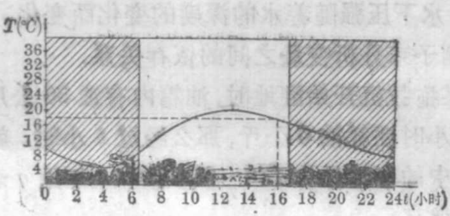


图 6-2

综上所述可以看到，同一个变化过程中的变量之间是互相联系的．只要一个变量取了某一个数值，另一个变量就一定有确定的数值和它对应．一般地说，如果在某一变化过程中，有两个变量 x 和 y，并且对于 x 的每一个确定的值，y 就按照一定的规律，取相应的值和它对应，那么变量 y 就叫做变量 x 的函数．其中 x 叫做自变量，y 叫做因变量．

如例(1)中，t 是自变量，q 是因变量，剩油量 q 是时间 t 的函数；例(2)中，H 是自变量，Q 是因变量，流量 Q 是水位 H 的函数；例(3)中，t 是自变量，T 是因变量，温度 T 是时间 t 的函数．

为了应用方便，我们把"变量 y 是变量 x 的函数"记作 $y=f(x)$．如例(1)中，剩油量 q 是 t 的函数，可用 $q=f(t)$ 来表示．我们要注意，符号 f 表示 y 和 x 之间的对应关系，不能把完整的记号 $f(x)$ 理解成 f 同 x 相乘．由于 $q=36-6t$，所以也可以写成

$$f(t)=36-6t.$$

有时为了区别不同的对应规律，可用不同的记号如"f"，"g"，"F"等表示各自的函数关系．

2．函数值和函数定义域 在拖拉机耕地时，我们可以利用剩油量 q 与时间 t 的函数关系，来求某一时刻的剩油量，这

就是求函数值的问题.

对于函数 $y=f(x)$，如果当自变量 x 取特定值 a 时，它所对应的因变量 $y=A$，那么 A 叫做函数 $y=f(x)$ 当 $x=a$ 时的函数值，记作 $f(a)$，也就是 $f(a)=A$. 例如函数 $f(t)=36-6t$，当 $t=1$ 时，函数值 $f(1)=36-6\times1=30$；当 $t=2$ 时，函数值 $f(2)=24$.

【例 1】 设 $y=f(x)=x^3-2x^2+3x-1$，求：

$$f(0);\quad f\left(\frac{1}{2}\right);\quad f(-1);\quad f(a).$$

解： $f(0)=-1$.

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^3-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\times\frac{1}{2}-1=\frac{1}{8}.$$

$$f(-1)=(-1)^3-2\times(-1)^2+3\times(-1)-1=-7.$$

$$f(a)=a^3-2a^2+3a-1.$$

在一个函数关系中，我们把自变量在变化过程中允许取值的范围叫做函数的定义域.

【例 2】 确定下列函数的定义域：

(1) $y=3x+2$； (2) $y=\dfrac{x+1}{x-1}$； (3) $y=\sqrt{16-2x}$.

解：(1) 因为 $3x+2$ 是整式，x 取一切实数它都有意义，所以函数 $y=3x+2$ 的定义域是一切实数.

(2) 因为 $\dfrac{x+1}{x-1}$ 是分式，要使它有意义，必须使分母不为零，即 $x-1\neq0$，就是 $x\neq1$. 所以函数 $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ 的定义域是 $x\neq1$ 的一切实数.

(3) 因为 $\sqrt{16-2x}$ 是偶次根式，要使它有意义，必须使被开方数大于或等于零，即 $16-2x\geqslant0$，得 $x\leqslant8$. 所以函数

$y=\sqrt{16-2x}$ 的定义域是 $x\leqslant 8$ 的一切实数.

研究函数的定义域时，一方面要考虑怎样使函数表达式本身有意义，另一方面还要考虑函数所表示的具体问题的实际意义. 例如，拖拉机油箱剩油量 q 和时间 t 之间的函数关系 $q=36-6t$，从函数表达式本身看，它的定义域是一切实数，但从实际问题看，时间 t 显然应该从 0 开始到 6 为止，因为 6 小时以后，油箱中的油用完了. 在这里，时间 t 取负值或大于 6 都没有实际意义，所以它的定义域是 $0\leqslant t\leqslant 6$.

练习

1. 已知 $f(x)=x^2-1$，求 $f(0)$； $f(1)$； $f(-2)$.
2. 已知 $f(x)=\dfrac{3x}{2x-1}$，求 $f(0)$； $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$； $f(a)$.
3. 确定下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{4}{x-3}$； (2) $y=-\sqrt{x-4}$；

(3) 圆周长 $C=2\pi r$.

[1. -1; 0; 3. 2. 0; -3; $\dfrac{3a}{2a-1}$. 3. (1) $x\neq 3$; (2) $x>4$;

(3) $r>0$.]

三、函数的表示法

在前面学习函数概念时可以看到，两个变量之间的函数关系，常用的表示方法有以下三种：

1. *公式法* 就是用数学式子来表示两个变量之间的函数关系. 例如前面学到的

$$q=36-6t.$$

2. *列表法* 就是用表格的形式列出自变量和因变量的对应值，以表示它们之间的对应关系. 例如前面学过的河水的流量 Q 和水位 H 之间的函数关系. 在《数学用表》中，平方

根表、三角函数表等等，都是用列表法表示函数关系的.

3. 图象法　就是用图象（一般是曲线）来表示变量之间的函数关系. 例如前面学到的某天气温 T 和时间 t 之间的函数关系，就是用图象法来表示的.

函数关系的三种表示法各有优缺点. 公式法简单明了，但是在具体问题中，往往需要通过实践，把变量间的对应关系用列表法或图象法表示出来，进而表示成为公式. 另外，不是所有的函数关系都能用公式表示出来的. 列表法可直接从表中查得函数值，使用方便. 但表格只能列出一部分对应值，有局限性，而且不容易看出函数的变化情况. 图象法可以非常直观地看出变化规律，但在找对应值时往往不够精确. 所以我们在解决实际问题时，应该根据需要和可能，采用合适的表示方法，有时需要将它们结合起来使用.

【例 3】　某公社要修建一条灌溉渠，要求底宽 1.2 米，坡比为 1:1.5. 求渠口宽度 y（米）与渠深 x（米）之间的函数关系. 当渠深 $x=0.8$m 时，渠口宽度应该是多少米？

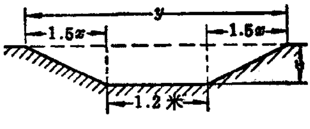


图　6-3

解：渠道的横截面一般为等腰梯形，根据坡比，当渠深为 x 时，从图 6-3 中可知

$$y=2(1.5x)+1.2=3x+1.2,$$

这就是用公式法表示渠口宽 y（米）与渠深 x（米）之间的函数关系.

当 $x=0.8$(m) 时，$y=3\times0.8+1.2=3.6$(m)，

即当渠深为 0.8 米时，渠口宽度应为 3.6 米.

【例 4】　为了充分发挥水库的防洪、灌溉和发电的作用，必须掌握不同水深时的水库存水量（简称库容）. 某水库工人

老师傅根据库址地形图，计算出水深和水库容量之间的一组数据，列表如下：

水深（米）	0	5	10	15	20	25	30
库容*（万方）	0	20	40	90	160	275	437.5

* 库容的测定可利用地形图上的等高线求得，其步骤是，先用补充法（也称方格法）计算出某水深时的水面以下每条等高线所包围的面积 $S_1, S_2, \cdots, S_n$.（量算面积时，将方格纸复于所要计算的等高线所围的图形上，计算图形内的整方格数及估计出不足一整格的方格数，两者相加即为所求的面积.）然后计算相邻两等高线间的容积：

$$V_1=\frac{1}{2}(S_1+S_2)h,\quad V_2=\frac{1}{2}(S_2+S_3)h,\quad \cdots,\quad V_n=\frac{1}{2}(S_{n-1}+S_n)h,$$

其中 h 是两等高线的高差．那么某水深库容即为 $V=V_1+V_2+\cdots+V_n$.

这就是用列表法表示库容量与水深之间的函数关系．根据上表可以知道在不同水深情况下的库容量，如水深 20 米时，库容量为 160 万方．

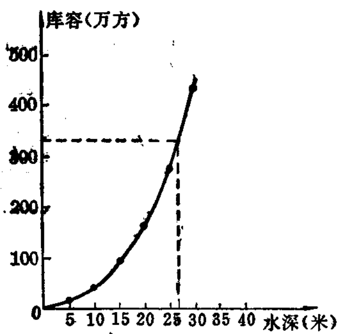


图 6-4

如果水深在 25～30 米之间，那么从表里就找不到对应的库容量．这时可以采用图象法．我们以水深（米）作为横轴，库容量（万方）作为纵轴，画出直角坐标系．把表中水深和库容量的每一对数值，在直角坐标系里定出相应的点．用一条光滑的曲线顺次连接各点，得到图 6-4 的水深库容曲线．利用这条曲线，就能掌握在 0～30 米间任何水深的近似库容量，例如水深 27 米时，从图上可以看出库容量约为 330 万方．

【例 5】 从行车安全和平稳考虑，在火车轨道拐弯处，不

应当把直线轨道和圆弧轨道直接相连接，而要利用一段缓和轨道(图 6-5)，使弯曲程度能够缓慢地改变．这种缓和轨道，在与直线轨道连接处必须是直的，在与圆弧轨道连接处应与圆弧轨道的弯曲程度一致．缓和轨道可用函数关系式

$$y=x^3$$

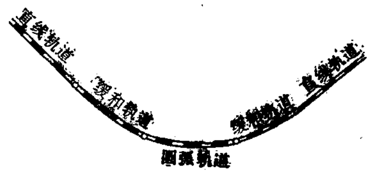


图 6-5

表示．在修建铁路中，放样时需要画出它的图象来．

下面我们就以 $y=x^3$ 为例，说明怎样画函数图象．

(1) 列表．取自变量 x 的一些值，算出相应的函数值 y，列成下表：

x	…	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	…
$y=x^3$	…	-8	-3.38	-1	-0.13	0	0.13	1	3.38	8	…

(2) 描点．把自变量 x 的值作为横坐标，函数 y 的值作为纵坐标．用表上的各组对应值作为点的坐标，在直角坐标系里作出各点．

(3) 连线．用一条光滑的曲线依次连接各点，所得的曲线即是函数 $y=x^3$ 的图象(图 6-6)．

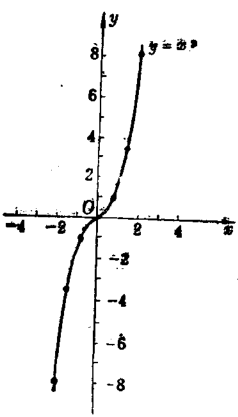


图 6-6

【例 6】 画正弦函数 $y=\sin x$ 的图象．

解：给 x 以 0 到 2π 的任意一些值，利用三角函数表，查出和它们对应的 y 的值，列表如下：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π
y	0	0.5	0.86	1	0.86	0.5	0	−0.5	−0.86	−1	−0.86	−0.5	0

把每一组对应值作为点的直角坐标，作出对应的各点，再用光滑的曲线把它们连接起来，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 从 $x=0$ 到 $x=2\pi$ 的一段图象(图 6-7)。

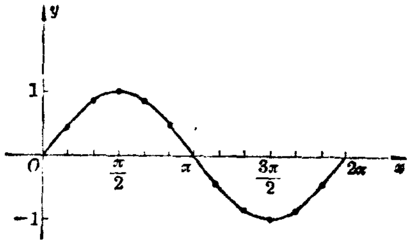


图 6-7

练习

1. 在客货轮的船头下部，有一条表示客货轮吃水深度的吃水线．货轮所装的货物越多，排水量就越大，相应地吃水越深．下表是某万吨轮吃水深度与相应的排水量之间的一组数据：

吃水深度(米)	3	4	5	6	7	8	9
排水量(吨)	5020	7225	9275	11475	13750	16125	18525

(1) 根据上表计算吃水深度从 3 米上升为 4 米时，客货轮多装了多少货物?

(2) 画出吃水深度和排水量之间的函数关系的图象(称为吃水曲线)；

(3) 利用吃水曲线计算当吃水深度从 8.5 米下降到 6.3 米时，货轮卸下货物的重量．

2. 画出余弦函数 $y=\cos x$ 的图象.

[1. (1) 2205 吨; (3) 5000 吨.]

四、函数图象的应用

函数的图象表示比较直观，便于观察分析，在三大革命实践中有较大的用处，举例如下：

【例 7】 植物光合作用的进行与温度有密切关系，温度对光合作用的影响可用一条曲线来表示. 图 6-8 是马铃薯光合作用的温度曲线. 从图象中可以比较清楚地看出温度与光合强度(每小时在每平方分米上吸收二氧化碳的毫克数)的函数关系，即当温度在 30°C 以下时，光合强度随着温度的升高而增加；温度升高到 30°C 以上，光合强度反而下降，最后完全停止. 一般当温度保持在 25～30°C 之间时，光合作用较强，所以这样的温度最适合于植物的生长.

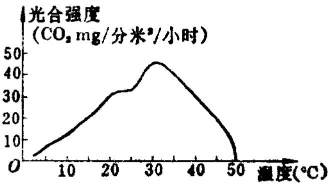


图 6-8

【例 8】 某生产队知识青年科学实验小组在搞田间试验时，对早稻田分别施用三种不同数量的碳酸氢铵，并调查得出它们的分蘖情况如下表所示：

施肥处理	t (月/日)							
	5/15	5/18	5/22	5/26	5/30	6/7	6/14	6/18
	分蘖数 y (枝)							
(I)	24	45	65	86	95	105	99	98
(II)	24	35	54	70	75	90	81	75
(III)	24	40	60	81	81	81	78	78

对于一个确定的日期t,我们总可以调查得到旱稻的分蘖数y和它对应,所以y与t之间存在着函数关系. 在同一平面直角坐标系里,分别画出它们的图象(图6-9).

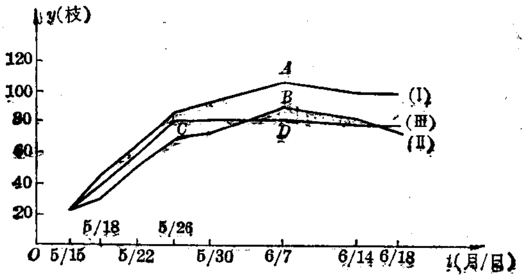


图 6-9

观察图中的曲线可以知道:

(1) 曲线(I)始终在曲线(II)、(III)的上方,这就说明采用第(I)种施肥方法,旱稻分蘖力特别强.

(2) 三条曲线的最高点的坐标分别是$A(6/7, 105)$, $B(6/7, 90)$, $C(5/26, 81)$. 这说明用第(I)种施肥方法,6月7日旱稻达到分蘖最高峰,其值为105枝;用第(II)种施肥方法,6月7日旱稻达到分蘖最高峰,其值为90枝;用第(III)种施肥方法,5月26日旱稻达到分蘖最高峰,其值为81枝.

(3) CD一段曲线平坦,说明采用第(III)种方法施肥时,旱稻分蘖最高峰时间较长.

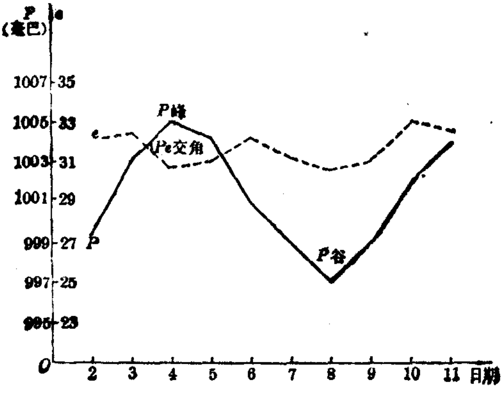
我们就可以根据这些分析及其他要求,来决定对旱稻施用碳酸氢铵的数量.

【例9】 某气象站应用单站气象要素变化曲线进行普查分析,发现台风季节中出现的气压峰*,与峰后一定时期出现

* 气压最高的值.

的台风(降雨)有较密切的关系.

该气象台七月份上旬每天14时测得的气压和绝对湿度*，画成曲线如图 6-10 所示. 根据经验，如果图上出现气压上升、绝对湿度下降的情况，并且气压曲线 P 和绝对湿度曲线 e 的交角小于 $90°$，相交后的第一个气压峰值小于 1007.8 毫巴，那么峰后第八天将有台风影响本站. 1971 年 7 月 4 日该县 14 时要素变化曲线图上出现了气压上升，绝对湿度下降，两线交角小于 $90°$，气压峰值小于 1007.8 毫巴，因此预报 7 月 12 日将有台风影响本站. 实际情况是 7 月 12 日的确有十二号台风影响该县，这个地区出现了大风和中到大雨.



14 时要素变化曲线图

图 6-10

小　结

1. 在某一运动过程中，数值保持不变的量叫常量，可取不同数值的量叫变量.

---

* 单位体积空气中所含水蒸气的质量.

2．量与量之间的函数关系 $y=f(x)$，是指当自变量 x 每取一个确定的值时，因变量 y 总按一定的规律，取确定的值与之对应.

3．$f(a)$ 是指当自变量 $x=a$ 时，函数 $f(x)$ 的值；函数的定义域是指自变量的取值范围.

4．表示函数的方法有三种：公式法、列表法、图象法.

5．画函数图象的步骤：(1) 列表；(2) 描点；(3) 连线.

习　　题

1．确定下列函数的定义域：

(1) $y=1+x^2$；　(2) $y=\frac{3x}{4x-8}$；　(3) $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$.

2．设 $y=f(x)=2x^2-1$，求 $f(2)$；$f\left(-\frac{1}{2}\right)$；$f(\sqrt{2})$.

3．我国于1971年三月发射的科学实验人造卫星，绕地球一周需要106分钟，试写出卫星绕地球运行的周数 C 和时间 t 的函数关系式.

4．在长12厘米的弹簧上，挂的重量每增加1公斤，就拉长2厘米(在弹性限度内)，用公式法写出弹簧长 y（厘米）与所挂重量 x（公斤）之间的函数关系.

5．为了分析水泵的性能，要找出水泵的流量 Q（米^3/小时）和相应的扬程 H（米）（提水的高度）之间的关系．工人师傅通过实验得到下列数据：

Q（米^3/小时）	1	3	6	10	11	12	14
H（米）	20.8	21	20.3	18	17.2	16.2	14

(1) 作出水泵流量 Q 与扬程 H 的函数关系的图象；

(2) 根据图象分析流量 Q 为多少时，扬程最大；扬程如何随流量的变化而变化.

6．画出下列函数的图象：

(1) $y=3x+2$；　(2) $y=2x^2$；　(3) $y=\operatorname{tg}x$.

第二节　一次函数

一、正比例函数

一艘海轮，以每小时 17 浬的速度前进，那么，航程 S(浬)和时间 t(小时)的函数关系是

$$S=17t.$$

又如，某排灌站水泵出水的流量每秒钟 0.07 立方米，那么，总出水量 Q(立方米)和时间 t(秒)的函数关系是

$$Q=0.07t.$$

以上两个例子的实际意义虽然不同，但函数关系式的右边都是一个不等于零的常量和自变量的乘积，所以都可以写成

$$y=kx$$

的形式，其中 k 是常量.

在这种函数关系中，自变量 x 与因变量 y **成正比例关系**，因此我们把 y 叫做 x 的正比例函数.

下面我们以 $y=2x$ 为例，来画它的图象.

取自变量 x 的一些值，算出相应的函数值 y，列成下表：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8	…

在直角坐标系中描出各点，再用一条光滑的线把它们依次连接起来，就得到 $y=2x$ 的图象(图 6-11)。

我们可以看出，$y=2x$ 的图象是过原点 (0, 0) 的一条直线．在直线上任取一点 $P(2.5, 5)$，把这点的坐标代入

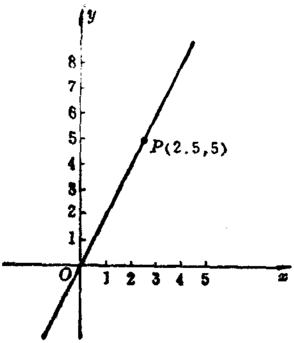


图 6-11

$y=2x$，等式成立．一般地说，直线上的点的坐标是适合于这个函数关系式的．

由此可知，正比例函数 $y=kx$ 的图象，是一条过原点 $(0, 0)$ 的直线．

因为两点决定一条直线，所以画正比例函数的图象，只要取两点就可以了，一般取 $(0, 0)$，$(1, k)$ 这两点．

$y=kx$ 的图象以后简称为直线 $y=kx$．

【例 1】 在同一坐标系中，分别画出下列函数的图象：

$y=\frac{1}{2}x$； $y=x$； $y=3x$； $y=-4x$； $y=-x$；$y=-\frac{1}{3}x$．

解：$y=\frac{1}{2}x$ 的图象是过 $(0, 0)$ 和 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 两点的直线；

用同样方法，在同一直角坐标系中，可以画出其他几个函数的图象，如图 6-12 所示．

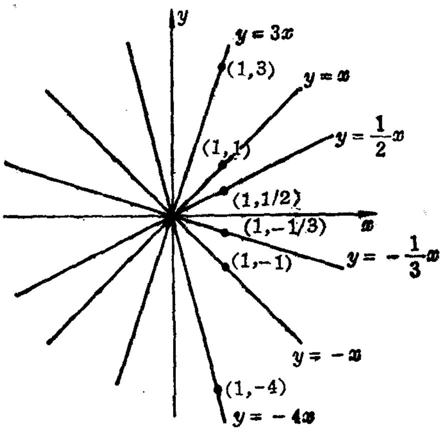


图 6-12

从图中可以看到，正比例函数

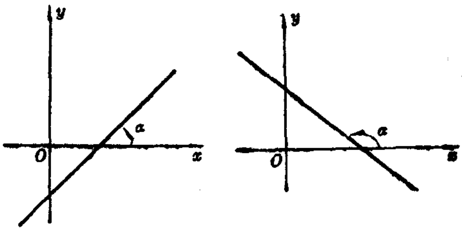
$y=kx$，

当 $k>0$ 时，它的图象是过原点且在第一、三象限的一条直线；当 $k<0$ 时，它的图象

是过原点且在第二、四象限的一条直线.

同时我们还看到，由于 k 的大小不同，直线对 x 轴的倾斜程度也不同. $|k|$ 越大，直线越陡. k 叫做直线 $y=kx$ 的斜率.

在许多实际问题中，直线的倾斜程度往往用角度来表示. 我们把一条直线向上的方向和 x 轴的正方向所夹的角叫做这条直线的倾角，如图 6-13(1)，(2) 里的 α. 当直线和 x 轴平行时，倾角是零. 显然 α 的范围是 $0°\leqslant\alpha<180°$.



(1)　　　(2)

图 6-13

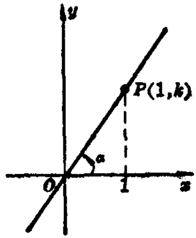


图 6-14

斜率 k 和倾角 α 有什么关系呢?

因为 $P(1, k)$ 是直线 $y=kx$ 上的一点(图 6-14)，根据三角函数的概念，有 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{k}{1}=k$. 由此可知，斜率 k 就是直线的倾角的正切，即

$$k=\operatorname{tg}\alpha.$$

练习

1. 汽油以每分钟 2.5 升的速度注入箱内，试写出注入的油量 Q(升)和时间 t(分)之间的函数关系式，并画出它的图象.
2. 在同一直角坐标系内，画出下列函数的图象，并指出它们的斜率:
   (1) $y=x$; (2) $y=-3x$.

[1. $Q=2.5t$. 2. (1) 1; (2) -3.]

二、一次函数

1. 一次函数的概念 预报霜冻，对农业生产关系很大. 某地气象台对该地区的气象进行了多年的观察分析，发现每年初霜时间和4月下旬的平均气温有关，总结了一个经验公式(这类经验公式的求法将在以后介绍)

$$y=-3.3x+72.6,$$

其中x表示每年4月下旬的平均气温. 从10月1日起向后数y天，那天就是初霜时间.

例如，1965年，这个地区4月下旬的平均气温为$x=12.1$°C，代入公式，得$y\approx33$. 他们预报初霜时间为11月2日，实际是11月3日. 又如1966年4月下旬平均气温$x=15$°C，代入公式得$y\approx23$. 他们预报初霜时间为10月23日，实际就是10月23日.

上面这个实际问题的函数关系式中，自变量的最高次数是1，这种用自变量的一次式表示的函数叫做一次函数. 它的一般形式是

$$y=kx+b,$$

其中k和b是常量.

我们前面学到的拖拉机油箱剩油量q与时间t的函数关系$q=36-6t$，灌溉渠宽度与渠深之间的函数关系$y=3x+1.2$，都是一次函数.

函数$y=kx+b$，当$b=0$时，就成为$y=kx$. 可见正比例函数是一次函数的特例. 因此我们可以把一次函数$y=kx+b$与正比例函数$y=kx$联系起来进行研究.

2. 一次函数的图象

【例2】 在同一直角坐标系中，试画出函数$y=3x$和

$y=3x+4$ 的图象.

解：列出函数 $y=3x$ 和 $y=3x+4$ 的数值表：

x	…	-2	-1	0	1	2	…
$y=3x$	…	-6	-3	0	3	6	…
$y=3x+4$	…	-2	1	4	7	10	…

分别画出函数 $y=3x$ 和 $y=3x+4$ 的图象如图 6-15 所示.

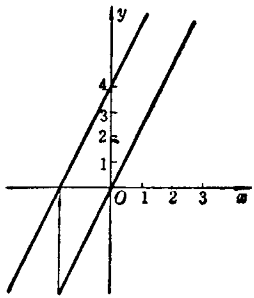


图 6-15

在列表过程中我们发现，对于 x 的同一个值，函数 $y=3x+4$ 的对应值，比函数 $y=3x$ 的对应值多 4. 因此，在这两个函数的图象上，横坐标相同的点，对应的纵坐标相差 4 个单位.

由此可见，直线 $y=3x+4$，相当于把直线 $y=3x$ 向上平行移动 4 个单位. 这就是说，一次函数 $y=3x+4$ 的图象是经过点 $(0,\ 4)$ 且和直线 $y=3x$ 平行的一条直线.

一般地，一次函数

$$y=kx+b$$

的图象是经过点 $(0,\ b)$，并且平行于直线 $y=kx$ 的一条直线. 它相当于把直线 $y=kx$ 沿着 y 轴的方向平行移动 $|b|$ 个单位. 如果 $b>0$，就是向上平移；如果 $b<0$，就是向下平移.

一次函数 $y=kx+b$ 中，b 是直线与 y 轴交点的纵坐标，叫做直线在 y 轴上的截距.

因为直线 $y=kx+b$ 与直线 $y=kx$ 平行，也就是，它们的

倾角的正切都是 k. 所以 k 也是直线 $y=kx+b$ 的斜率.

【例 3】 画出函数 $y=\frac{1}{2}x-5$ 的图象, 并写出它的斜率和在 y 轴上的截距.

解: 取 $x=0$, 得 $y=-5$; 取 $y=0$, 得 $x=10$. 经过 $A(0, -5)$ 和 $B(10, 0)$ 两点作直线 l. 直线 l 就是函数 $y=\frac{1}{2}x-5$ 的图象(图 6-16).

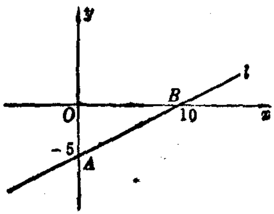


图 6-16

它的斜率 $k=\frac{1}{2}$, 它在 y 轴上的截距 $b=-5$.

从上述例题中, 我们知道 $y=\frac{1}{2}x-5$ 的图象是一条直线 l. 这条直线上的每一点的坐标都适合于 $y=\frac{1}{2}x-5$, 而且只有 l 上的点的坐标适合于它.

现在, 如果把 x 和 y 看成是两个未知数, 那么等式

$$y=\frac{1}{2}x-5$$

就是一个含有未知数 x 和 y 的方程. 凡适合这个方程的 x 和 y 的一组值叫做它的一组解. 由一次函数的图象可以知道, 直线 l 上每一点的坐标都是方程 $y=\frac{1}{2}x-5$ 的一组解, 例如

$$\begin{cases}x=0,\\ y=-5;\end{cases}\quad \begin{cases}x=2,\\ y=-4;\end{cases}\quad \begin{cases}x=10,\\ y=0;\end{cases}\quad \cdots,$$

而且 $y=\frac{1}{2}x-5$ 的每一组解都是 l 上的某一点的坐标. 因此, 我们称 $y=\frac{1}{2}x-5$ 是直线 l 的方程.

一般地说，

$$y=kx+b$$

是斜率为 k，截距为 b 的直线的方程，通常也叫做直线的斜截式方程.

练习

画出下列函数的图象，并写出每条直线的斜率和在 y 轴上的截距：

(1) $y=4x+1$;　　　　　　　(2) $S=3x-4$.

[(1) $k=4,\ b=1$; (2) $k=3,\ b=-4$.]

小　结

1. 一次函数的一般形式是 $y=kx+b$，其中 k 和 b 是常量. 当 $b=0$ 时，$y=kx$ 就是正比例函数.

2. 一次函数 $y=kx+b$ 的图象是一条直线，它的斜率是 k，在 y 轴上的截距是 b；正比例函数 $y=kx$ 的图象是斜率为 k，过原点的直线.

3. 如果直线的倾角是 α，那么斜率 $k=\operatorname{tg}\alpha$.

4. 如果把 x 和 y 看成是两个未知数，那么 $y=kx+b$ 叫做直线的斜截式方程.

习　题

1. 一车工在加工零件前，用 15 分钟作准备工作，以后每加工一个零件平均用 20 分钟，写出工作时间 t(分钟)与产量 n(个数)之间的函数关系式.
2. 画下列函数的图象：

   (1) $y=-\dfrac{3}{2}x$;　　　　　　(2) $y=-2x-1$.
3. 已知方程 $y=-3x+b$ 所表示的直线过点 $P(2,\ -3)$，画出这直线.

第三节　直线的方程

一、直线方程的几种形式

在机械工业中，经常要用一些特殊的刀具加工某种工

件. 在设计这种刀具时，必须先知道工件轮廓线的方程. 图6-17是某工件横截面的轮廓线，现在需要根据图示条件，求出 AB, BC 和 CD 三段直线的方程. 由于这里已知的条件并不全是斜率和截距，因此仅仅知道了斜截式方程还不够，还必须熟悉其他形式的直线方程.

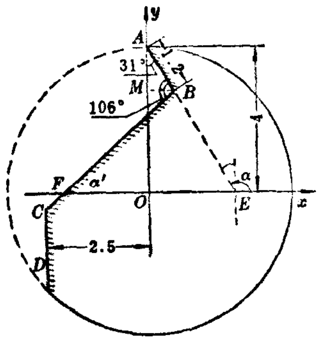


图 6-17

1. 直线的点斜式方程

已知直线的斜率与直线上的一点，直线的位置就可以确定. 设直线的斜率是 k，且经过点 $P_1(x_1, y_1)$，我们来求它的方程.

可设这直线的方程为

$$y=kx+b, \tag{1}$$

其中 k 是已知的，因此只要确定 b 就可以了.

因为点 $P_1(x_1, y_1)$ 在这直线上，所以它的坐标 (x_1, y_1) 适合于方程(1)，代入，得

$$y_1=kx_1+b,$$

由此求出

$$b=y_1-kx_1.$$

再把求得的 b 的值代入方程(1)，得

$$y=kx+y_1-kx_1,$$

就是

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{2}$$

这个方程中的 x_1, y_1 是已知点的坐标，k 是直线的斜率，所以这种方程叫做直线的点斜式方程.

2. 直线的二点式方程与截距式方程　两点决定一直线. 下面我们来求过已知两点 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 的直线的方程.

在直角坐标系中，设过已知两点 P_1, P_2 的直线的倾角为 α(图 6-18)，从 P_1 画与 x 轴平行的直线，从 P_2 画与 y 轴平行的直线，它们相交于 Q. 则 $\angle P_2P_1Q=\alpha$. 很容易看出，所求直线的斜率是

$$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{QP_2}{P_1Q}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

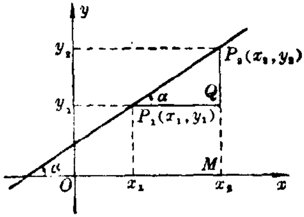


图 6-18

根据直线的点斜式方程，可得所求直线的方程

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

或者写成便于记忆的形式

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}.$$

这个方程叫做直线的两点式方程.

如已知直线上的两已知点是直线与两轴的交点 $A(a, 0)$ 和 $B(0, b)$ (图 6-19)，那么应用两点式可得直线的方程

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}.$$

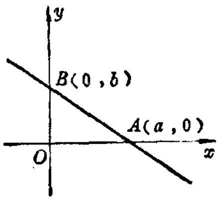


图 6-19

对角相乘，各项除以 ab. 得

$$\frac{bx}{ab}+\frac{ay}{ab}=\frac{ab}{ab},$$

就是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

这里 a 和 b 分别是直线在 x 轴和 y 轴上的截距，所以这个方程叫做截距式方程.

【例 1】 求图 6-17 中直线 AB, BC, CD 的方程.

解：(1) 直线 AB 的方程. 由图可知，

$$\alpha=90^\circ+31^\circ=121^\circ,$$

$$\therefore \quad k=\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}121^\circ=-1.6643.$$

又直线 AB 在 y 轴上的截距 $b=4$. 应用直线的斜截式方程，得直线 AB 的方程是

$$y=-1.6643x+4,$$

就是
$$1.6643x+y-4=0.$$

(2) 直线 BC 的方程. 先计算 BC 的斜率.

$$\because \quad \alpha=\alpha'+(180^\circ-106^\circ),$$

$$\therefore \quad \alpha'=\alpha-(180^\circ-106^\circ)=121^\circ-74^\circ=47^\circ,$$

$$k=\operatorname{tg}47^\circ=1.0724.$$

再计算点 B 的坐标(x_1, y_1). 从点 B 画 y 轴的垂线 BM，交 y 轴于点 M，在直角三角形 ABM 中，

$$x_1=1.2\sin 31^\circ=1.2\times 0.5150=0.6180,$$

$$y_1=4-1.2\cos 31^\circ=4-1.2\times 0.8572=2.9714.$$

应用直线的点斜式方程，就可以求得 BC 的方程

$$y-2.9714=1.0724(x-0.6180),$$

化简得
$$1.0724x-y+2.3087=0.$$

(3) 直线 CD 的方程. 因为直线 CD 平行于 y 轴，倾角 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，这时正切不存在，所以上述几种直线方程都不适用.

与纵轴平行的直线 CD 上的横坐标总是 -2.5，而且凡是横坐标等于 -2.5 的点总在直线 CD 上，所以直线 CD 的方程是

$$x=-2.5 \quad \text{或} \quad x+2.5=0.$$

一般地说，与 y 轴平行，且在 x 轴上的截距为 a 的直线方程，具有

$$x=a$$

的形式.

前面所写出的直线方程，都可以归结为关于 x 和 y 的二元一次方程

$$Ax+By+C=0$$

(包括未知数的系数有一个是零的情形)．这是问题的一个方面．反过来看，关于 x 和 y 的一次方程，是否都表示直线呢？

对于一般的二元一次方程

$$Ax+By+C=0 \quad (A, B\text{ 不全为零}),$$

当 $B\neq0$ 时，总可以变形成一次函数

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \quad (\text{即 } y=kx+b)$$

的形式，它的图象是一条与 y 轴相交的直线；当 $B=0$ 时，方程可以变形成

$$x=-\frac{C}{A} \quad (\text{即 } x=a)$$

的形式，它的图形是一条与 y 轴平行的直线．因此，二元一次方程

$$Ax+By+C=0$$

的图形总是一条直线．

【例 2】 在弹性限度内，当拉力较小时弹簧不发生形变，当拉力加到一定数量 f_0 时才开始形变(f_0 称为初应力)．弹簧的形变与所受的力成正比．合格产品的形变 S 与受力 F 之间的关系式为

$$F-f_0=kS \quad \text{或} \quad F-kS-f_0=0,$$

这里 k 是弹性系数．这个方程表示一条直线．工人老师傅根据这个道理，采用如下办法对产品进行检验．

适当选取 F 的三个值作试验，求出相应的三个 S 值．如果以 F, S 的三组值为坐标的三点，在直角坐标系中的一直线

上，那么产品就合格，否则就不合格.

例如，拖拉机调速弹簧，根据试验，外力大于0.85公斤时才开始形变，外力为2.35公斤时形变为10毫米，外力为3.84公斤时，形变为20毫米．在直角坐标系中描出三点 $A(0,\ 0.85)$，$B(10,\ 2.35)$，$C(20,\ 3.84)$，这三点恰在一直线上(图6-20)，因此这个产品合格.

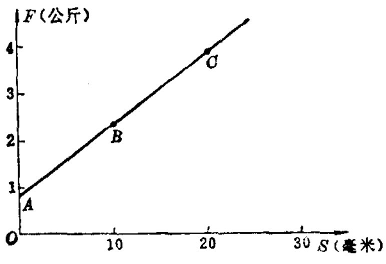


图 6-20

练习

1．已知一条直线的倾角是120°，在 y 轴上的截距是 -3，求这直线的方程.

2．求经过两点(2, 3)和(−2, −5)的直线的方程.

3．求经过两点(3, 0)和(0, −2)的直线的方程.

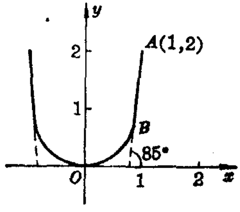
4．图中所示是一类精密齿轮根部曲线的图形，为了设计刀具，需要求出各段轮廓线的方程，试根据图示数据，求出直线 AB 的方程.

5．画出直线：

(1) $x+2y+3=0$;

(2) $y-3=0$.

[1．$y=-\sqrt{3}x-3$．2．$2x-y-1=0$．3．$2x-3y-6=0$．4．$11.43x-y-9.43=0$.]



(第4题)

二、点到直线的距离

在生产实际中，常常需要计算一点到一条直线的距离．如图6-21所示是拖拉机支承架的平面图．在检验这个零件时，

需要知道孔心 O 到边 AB 的距离 OH.

为了解决这类问题，我们先介绍两直线互相垂直的条件.

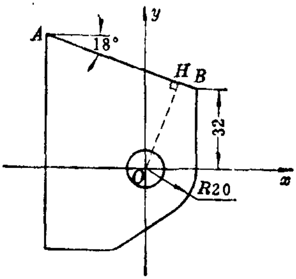


图 6-21

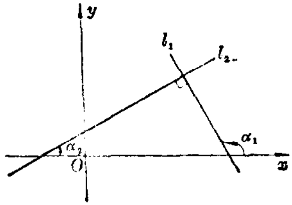


图 6-22

如果直线

$$l_1:\ y=k_1x+b_1\ \text{和}\ l_2:\ y=k_2x+b_2$$

互相垂直(图 6-22)，则有

$$\alpha_1=\frac{\pi}{2}+\alpha_2.\ (\text{为什么?})$$

因此，$$\operatorname{tg}\alpha_1=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_2\right)=-\operatorname{ctg}\alpha_2=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_2},$$

就是 $$k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

反过来也成立.

所以，两直线互相垂直的条件是斜率互为负倒数.

现在，我们来讨论如何求点到直线的距离.

已知直线 l: $y=kx+b$ 和线外一点 $P_0(x_0,\ y_0)$(图 6-23)，求 P_0 到直线 l 的距离.

过 P_0 作 y 轴的平行线和 l 的垂线，分别交 l 于 Q 和 M，则点 P_0 到直线 l 的距离

$$d=P_0M=P_0Q\,|\cos\alpha|, \tag{1}$$

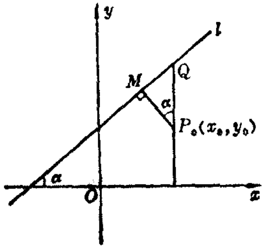


图 6-23

其中 α 就是直线 l 的倾角，因为距离总是正值，所以 $\cos\alpha$ 取绝对值.

设点 Q 的坐标为 (x_1, y_1)，因为它在直线 l 上，且 $x_1=x_0$，代入直线 l 的方程，得

$$y_1=kx_0+b,$$

所以

$$P_0Q=|y_0-y_1|=|y_0-kx_0-b|. \tag{2}$$

在第五章第一节中我们知道，

$$1+\operatorname{tg}^2\theta=\sec^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta},$$

所以
$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}.$$

应用上面公式，且这里 $\operatorname{tg}\alpha=k$，得

$$|\cos\alpha|=\sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{3}$$

以(2)和(3)代入(1)，得

$$d=\frac{|y_0-kx_0-b|}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{4}$$

这公式就是从点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $y=kx+b$ 的距离的公式.

当直线方程取一般形式

$$Ax+By+C=0$$

时，以 $k=-\dfrac{A}{B}$，$b=-\dfrac{C}{B}$ 代入(4)，化简得

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \tag{5}$$

这就是从点 $P_0(x_0, y_0)$ 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式.

【例 3】 求点 (5, 2) 到直线 $4x-3y+1=0$ 的距离(图

6-24).

解：由点到直线的距离公式(5)，得

$$d=\frac{|4\times5-3\times2+1|}{\sqrt{4^2+3^2}}=3.$$

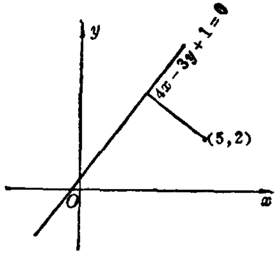


图 6-24

【例 4】 试根据图 6-21 上的尺寸(单位：毫米)，求出 OH.

解：因为直线 AB 的斜率

$$k=\mathrm{tg}(180°-18°)$$
$$=-\mathrm{tg}18°=-0.3249$$

(根据倾角的定义和内错角相等可知)，点 B 的坐标是 $(20, 32)$，所以根据点斜式方程可得直线 AB 的方程

$$y-32=-0.3249(x-20),$$

即

$$0.3249x+y-38.498=0.$$

又 ∵ 孔心 O 的坐标为 $(0, 0)$，根据公式(5)，

$$\therefore\ OH=\frac{|-38.498|}{\sqrt{0.3249^2+1^2}}=\frac{38.498}{\sqrt{1.1056}}=36.61(\mathrm{mm}).$$

【例 5】 图 6-25 表示一个要磨削的工件. AB, CD 和 EF 是圆弧，BC 和 DE 是直线. 进行磨削时需要知道 $\overset{\frown}{CD}$ 的中心 O_2 的坐标. 试根据图示尺寸(单位：毫米)，求 O_2 的纵坐标 h.

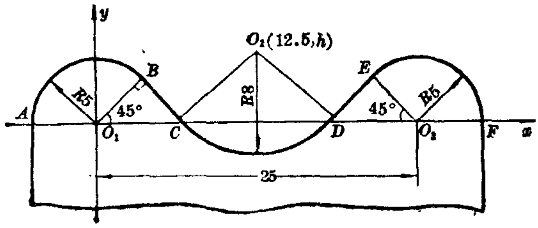


图 6-25

解：我们先求直线 BC 的方程，然后应用点到直线的距离公式，求出 h 来.

从图中可以看到，$O_1B=5$，且 O_1B 的倾角为 $45°$，所以点 B 的坐标是 $(5\cos 45°,\ 5\sin 45°)$，就是 $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$. 而 BC 的倾角为 $90°+45°=135°$，所以 BC 的斜率

$$k=\operatorname{tg}135°=-1.$$

用点斜式求得 BC 的方程是

$$y-\frac{5\sqrt{2}}{2}=-\left(x-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),$$

化简，得
$$x+y-5\sqrt{2}=0.$$

由点 $O_2\ (12.5,\ h)$ 到直线 BC 的距离，由距离公式可知，

$$d=\frac{|12.5+h-5\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{(12.5-5\sqrt{2})+h}{\sqrt{2}}.$$

从图中知道
$$d=R=8,$$
因此有

$$8=\frac{(12.5-5\sqrt{2})+h}{\sqrt{2}},$$

解得
$$h\approx 5.9.$$

练习

1. 求从原点到直线 $4x-3y=9$ 的距离.
2. 求从点 $(2,\ 1)$ 到直线 $2x-3y+6=0$ 的距离.

[1. 1.8. 2. $\frac{7}{\sqrt{13}}$.]

小　　结

1. 直线方程除了斜截式 $y=kx+b$ 外，还有下列几种形式：

(1) 点斜式 $y-y_1=k(x-x_1)$；

(2) 两点式 $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$;

(3) 截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

2. 任何一个二元一次方程都表示直线，任何直线的方程都是二元一次方程.

3. 过点 $P_1(x_1, y_1)$和 $P_2(x_2, y_2)$的直线的斜率是

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

4. 两直线 $y=k_1x+b_1$ 和 $y=k_2x+b_2$ 互相垂直的条件是

$$k_1=-\frac{1}{k_2}.$$

5. 由点 $P_0(x_0, y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离是

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

习　　题

1. 画出下列方程的图象，并求它的斜率和倾角:

   (1) $y-x+3=0$;　　(2) $\sqrt{3}x+y-2=0$.

2. 写出下列直线的方程，并化为 $Ax+By+C=0$ 的形式:

   (1) 经过点(2, 7)，倾角是 50°;

   (2) 倾角 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$，在 y 轴上的截距 $b=-\dfrac{5}{2}$;

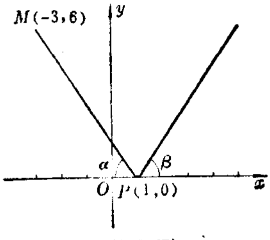
   (3) 通过点(2, −6)和点(−4, 1);

   (4) 在 x 轴上的截距 $a=4$，在 y 轴上的截距 $b=-2$;

   (5) 过点(4, −3)且平行于 $3x-y-3=0$;

   (6) 与过两点(4, 1)和(7, 3)的直线垂直，且在 y 轴上的截距为3.

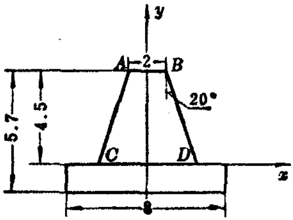
3. 光线从点 $M(-3, 6)$射到点 $P(1, 0)$，被 x 轴(镜面)所反射，求反射光线的方程.（提示: $\angle\alpha=\angle\beta$.）



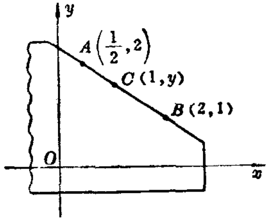
(第 3 题)

4. 如图所示是一铣刀样板的视图，为了加工铣刀样板的边 BD，试在如图所示的坐标系中求出 BD 的方程.

5. 如图所示的零件上有一段直线，已知直线上两点的坐标 $A\left(\dfrac{1}{2},2\right)$，$B(2,1)$. 求横坐标为 1 的点 C 的纵坐标.



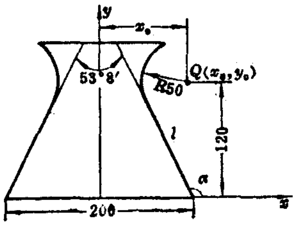
(第 4 题)



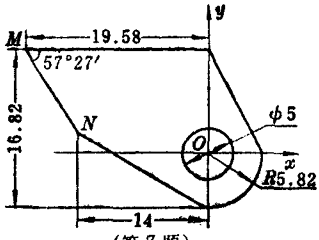
(第 5 题)

6. 一零件如图所示，试按照图上尺寸(单位：毫米)，求圆弧 $R50$ 的中心 $Q(x_0, y_0)$ 的横坐标 x_0.（提示：Q 到直线 l 的距离为 50，$\angle\alpha=116°34'$.）

7. 下图是要磨削的零件，尺寸如图中所注(单位：毫米). 磨削时要知道点 O 到直线 MN 的距离. 求这个距离.



(第 6 题)



(第 7 题)

第四节　二元一次方程组

一、二元一次方程组的概念

40 个人要完成一项挖土和运土任务，应分配多少人挖

土？多少人运土？我们可设 x 个人挖土，y 个人运土，得到一个二元一次方程

$$x+y=40.$$

但是为了使挖出的土及时运走，例如，如果每人每天能挖土 5 方或运土 3 方，那么挖土人数 x 与运土人数 y 之间的关系，除 $x+y=40$ 外，还要使 x 个人的挖土量 $5x$ 和 y 个人的运土量 $3y$ 相等，就是要

$$5x=3y.$$

所以 x 和 y 必须同时满足两个二元一次方程：

$$\begin{cases} x+y=40, & (1) \\ 5x=3y. & (2) \end{cases}$$

这种含有相同未知数的两个二元一次方程所组成的方程组，叫做二元一次方程组．二元一次方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

我们知道方程(1)可以有很多组解，如

$$\begin{cases} x=10, \\ y=30; \end{cases} \quad \begin{cases} x=15, \\ y=25; \end{cases} \quad \begin{cases} x=20, \\ y=20; \end{cases} \quad \begin{cases} x=25, \\ y=15; \end{cases} \quad \cdots.$$

同样，我们可以得到方程(2)的许多组解，

$$\begin{cases} x=3, \\ y=5; \end{cases} \quad \begin{cases} x=6, \\ y=10; \end{cases} \quad \begin{cases} x=15, \\ y=25; \end{cases} \quad \begin{cases} x=30, \\ y=50; \end{cases} \quad \cdots.$$

我们发现，在这许多组解中，只有 $x=15$，$y=25$，同时满足方程(1)和(2)，它是两个方程的公共解．

我们把组成方程组的所有方程的公共解，叫做这个方程组的解．例如方程(1)和(2)组成的方程组的解是

$$\begin{cases} x=15, \\ y=25. \end{cases}$$

因此，上述问题的解答是安排15个人挖土，25个人运土最合理.

解方程组就是求出方程组的解.

二、用消元法解二元一次方程组

解二元一次方程组，如果先求出两个二元一次方程的许多组解，再从其中找出它们的公共解，那是很困难的. 下面介绍用消元法来解二元一次方程组.

二元一次方程组的解法和一元一次方程的解法有密切的联系. 在二元一次方程组的一个方程中，我们设法消去一个未知数，把它转化为一元一次方程来解. 消去未知数也叫消元.

消元法有代入消元法和加减消元法两种.

1. 代入消元法

【例1】 解方程组

$$\begin{cases}3x+4y=2, & (1)\\ 2x-y=5. & (2)\end{cases}$$

解：把(2)变形成

$$y=2x-5. \quad (3)$$

将(3)代入(1)，得

$$3x+4(2x-5)=2,$$

$$11x=22,$$

$$x=2.$$

将$x=2$代入(3)，得

$$y=2\times2-5=-1.$$

∴ 方程组的解是

$$\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$$

用代入消元法解方程组的过程是：(1)把方程组中的一个方程，写成用一个未知数的代数式来表示另一个未知数的形式；(2)把这个代数式代入另一个方程，消去一个未知数，使二元一次方程组转化为一元一次方程；(3)解这个一元一次方程，求得一个未知数的值；(4)把求得的这个未知数的值代入第一步的代数式中，求出另一个未知数的值．得到的这两个未知数的值，就是该方程组的解．

【例 2】 解方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y=-\frac{2}{3}, & (1)\\ 5x+4y=13. & (2)\end{cases}$$

解：把(1)×6，得

$$2x-3y=-4,$$

$$x=\frac{3y-4}{2}. \qquad (3)$$

将(3)代入(2)，得

$$\frac{5(3y-4)}{2}+4y=13,$$

$$15y-20+8y=26,$$

$$23y=46,$$

$$y=2.$$

把 $y=2$ 代入(3)，得

$$x=1.$$

∴ 方程组的解是

$$\begin{cases}x=1,\\y=2.\end{cases}$$

2. 加减消元法

【例 3】 解方程组

$$\begin{cases}5x+3y=18, & (1)\\ 2x-3y=3. & (2)\end{cases}$$

解：这种类型的方程，当然也可以用代入消元法来解，但我们看到，这个方程组中未知数 y 的系数互为反数，如果我们把两个方程的两边分别相加，就可以消去 y. 这样我们得到

$$(5x+3y)+(2x-3y)=18+3,$$

$$7x=21,$$

$$x=3.$$

将 $x=3$ 代入(2)，得

$$2\times 3-3y=3,$$

$$3y=3,$$

$$y=1.$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x=3,\\ y=1.\end{cases}$$

如果直接将两个方程的两边相加减，不能达到消去一个未知数的目的，我们可以先将方程变形，使某一未知数的系数的绝对值相等，然后消去这个未知数.

【例 4】 解方程组

$$\begin{cases}8x+9y=23, & (1)\\ 13x+6y=46. & (2)\end{cases}$$

解：

$(1)\times 2$, $\quad 16x+18y=46,$ (3)

$(2)\times 3$, $\quad 39x+18y=138,$ (4)

$(4)-(3)$, $\quad 23x=92,$

$$x=4.$$

将 $x=4$ 代入(1)

$$8\times4+9y=23,$$
$$9y=-9,$$
$$y=-1.$$
$$\therefore\quad\begin{cases}x=4,\\y=-1.\end{cases}$$

从上面的例子可以看到，加减消元法就是把方程组的两个方程的两边分别乘以适当的数，使变形后的两个方程中，某一个未知数的系数的绝对值相等，这样就可将两个方程的两边分别相加或相减，消去一个未知数.

【例 5】用加减消元法解方程组:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{4}{3}, & (1)\\ 5(x-9)=6(y-2). & (2)\end{cases}$$

解：化简方程组.

(1) ×12, $$3x+4y=16, \quad (3)$$

(2)去括号，整理，得

$$5x-6y=33, \quad (4)$$

(3) ×3 $$9x+12y=48, \quad (5)$$

(4) ×2 $$10x-12y=66, \quad (6)$$

(5)＋(6) $$19x=114,$$

$$x=6.$$

将 $x=6$ 代入(3)，得

$$y=-\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad\begin{cases}x=6,\\y=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

练习

1. 用代入消元法解下列方程组:

(1) $\begin{cases} y=x+3, \\ 7x+5y=6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x-9.6y=3.6, \\ \dfrac{x}{3}=1+3y. \end{cases}$

2. 用加减消元法解下列方程组:

(1) $\begin{cases} 2x+5y=25, \\ 4x+3y=29; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 7x-3y=13, \\ 4x-5y=14. \end{cases}$

[1. (1) $\begin{cases} x=-\dfrac{3}{4}, \\ y=\dfrac{9}{4}; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x=-6, \\ y=-1. \end{cases}$

2. (1) $\begin{cases} x=5, \\ y=3; \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=1, \\ y=-2. \end{cases}$]

三、图解法和两直线的交点

1. 图解法　由于任何一个二元一次方程的图形都是直线，所以我们还可以利用图解法来解二元一次方程组.

【例 6】 用图解法解方程组

$$\begin{cases} x+3y=9, & (1) \\ 2x-y=4. & (2) \end{cases}$$

解: 如图 6-26, 我们在同一直角坐标系里画出方程(1)和(2)所表示的直线 AB 和 CD. 它们相交于点 $P(3, 2)$. 因为点 P 是两直线的交点，所以它的坐标 (3, 2) 既满足方程(1), 也满足方程(2), 这就是说 $x=3$, $y=2$ 既是方程 (1) 的解，也是方程 (2) 的解. 因此方程组的解是

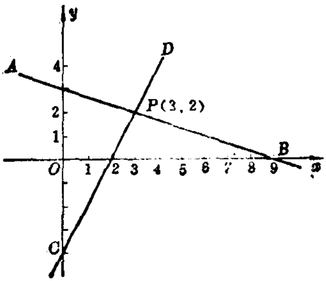


图 6-26

$$\begin{cases}x=3,\\y=2.\end{cases}$$

从上面的例子可以看到，要求二元一次方程组的解，可在同一坐标系内，分别画出两个二元一次方程的图形，如果得到两条相交的直线，那么交点的坐标就是方程组的解；如果两直线平行，即没有交点，那么方程组无解.

采用图解法解方程组比较直观，但因为未知数的值是由图中看出来的，一般只能求得方程组的近似解.

2. **两直线的交点** 上面是利用图解法来解二元一次方程组. 反过来，前面我们利用消元法解二元一次方程组，实则上就是求两直线的交点. 下面再看两个例子.

【例 7】 求直线 l_1: $2x+5y-26=0$ 和 l_2: $x-y+1.7=0$ 的交点.

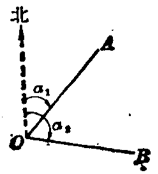
解：解方程组 $\begin{cases}2x+5y-26=0,\\x-y+1.7=0.\end{cases}$

得 $$\begin{cases}x=2.5,\\y=4.2.\end{cases}$$

所以 l_1 和 l_2 的交点的坐标为 $(2.5,\ 4.2)$.

【例 8】 气象台确定雷击位置，一般通过测站 $A(a_1,\ b_1)$ 和 $B(a_2,\ b_2)$，分别测得雷击位置 C 的方位角* θ_1, θ_2（图 6-27），根据测站位置和方位角，可以求得 AC，BC 两直线的方程，然

* 由指北方向线顺时针方向到一直线的角度，叫做该直线的方位角. 如图中 OA 的方位角是 α_1，OB 的方位角是 α_2.



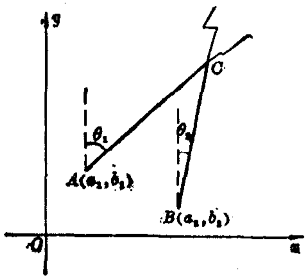


图 6-27

后计算它们的交点，即是雷击的位置.

因为 AC 的斜率

$$k_1=\operatorname{tg}(90°-\theta_1)=\operatorname{ctg}\theta_1.$$

同理，BC 的斜率

$$k_2=\operatorname{ctg}\theta_2,$$

所以应用点斜式，可得 AC 和 BC 的方程分别是

$$\begin{cases}y-b_1=\operatorname{ctg}\theta_1(x-a_1),\\ y-b_2=\operatorname{ctg}\theta_2(x-a_2).\end{cases}$$

解这个方程组可得直线 AC，BC 的交点 C 的坐标，从而确定雷击位置 C.

练习

1．用图解法解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x-3y=2,\\ \frac{1}{5}x+2y=3.\end{cases}$ (2) $\begin{cases}12x-5y=4,\\ 0.5x+1.5y=7.\end{cases}$

2．求下列两直线的交点：

$$2x+5y-9=0,\qquad 3x-2y-2.1=0.$$

[1. (1) $\begin{cases}x=5,\\ y=1;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=2,\\ y=4.\end{cases}$ 2. $\begin{cases}x=1.5,\\ y=1.2.\end{cases}$]

四、二元一次方程组应用举例

【例 9】 除草剂"敌草隆"，对大多数一年生和多年生杂草都有优良的杀草效果，并且对棉花的生育也有良好的作用．在棉花播后苗前，一般每亩可施 50% 可湿粉剂 0.35～0.5 斤．现有 25% 和 80% 的"敌草隆"可湿粉剂，要配制 50% 的粉剂 12 斤．两种粉剂各需要多少斤？

解：设需要 25% 的粉剂 x 斤，80% 的粉剂 y 斤．根据题意，两种粉剂的总量应是 12 斤，故有

$$x+y=12. \tag{1}$$

又两种粉剂中，“敌草隆”的含量 $25\% x$ 和 $80\% y$ 的和，应与总量 12 斤中“敌草隆”的含量 $50\% \times 12$ 相等，故又有

$$25\% x+80\% y=50\% \times 12.$$

上式各项都乘以 20，得

$$5x+16y=120. \tag{2}$$

问题要同时满足 (1)，(2) 两个方程．我们来解 (1) 和 (2) 所组成的方程组．

$(1)\times 5$ $\qquad 5x+5y=60, \qquad (3)$

$(2)-(3)$ $\qquad 11y=60,$

$\therefore \quad y=5.45.$

将 y 代入 (1)，得

$$x=12-5.45=6.55.$$

即需用 25% 的粉剂 6.55 斤，80% 的粉剂 5.45 斤．

【例 10】 某港驳公司有一种驳船，它的载重量是 800 吨，容积是 795 立方米．现要装运生铁和棉花两种货物，生铁每吨体积是 0.3 立方米，棉花每吨体积是 4 立方米．问生铁和棉花各装多少吨，才能最大限度地利用这艘驳船的载重量和容积．

解：设生铁装 x 吨，棉花装 y 吨．根据载重量有

$$x+y=800. \tag{1}$$

又 x 吨生铁的容积是 $0.3x$ 立方米，y 吨棉花的容积是 $4y$ 立方米．根据容积有

$$0.3x+4y=795. \tag{2}$$

要充分利用船的载重量和容积，应同时满足这两个方程．现

在我们来解(1)和(2)所组成的方程组.

由(1)可得

$$y=800-x. \tag{3}$$

将(3)代入(2),

$$0.3x+4(800-x)=795,$$

整理后,得

$$3.7x=2405,$$

$$\therefore \quad x=650.$$

将x代入(3),得

$$y=150.$$

即装生铁650吨,棉花150吨,才能最大限度地利用这艘驳船的载重量和容积.

【例11】 某生产队计划由18个甲等劳力和20个乙等劳力在一天内完成挖掘、整理和挑运甘薯的任务. 甲、乙劳力都参加挖掘,由乙劳力进行整理,甲劳力挑运. 现知甲劳力每人每天可以挖薯600斤,或挑运1280斤;乙劳力每人每天可以挖薯500斤,或整理600斤. 问甲劳力安排多少时间挖掘,多少时间挑运;乙劳力安排多少时间挖掘,多少时间整理,才能在1天内完成这项任务?

解: 设甲劳力挖掘时间为x,挑运时间就是$(1-x)$;乙劳力挖掘时间为y,整理时间就是$(1-y)$. 那么,这一天挖掘的数量是$(18\times600)x+(20\times500)y$,即$10800x+10000y$. 整理的数量是$(20\times600)(1-y)$,即$12000(1-y)$. 挑运的数量是$(18\times1280)(1-x)$,即$23040(1-x)$. 因为一天内挖掘、整理、挑运的数量是相同的,所以可得方程组

$$\begin{cases}10800x+10000y=12000(1-y), & (1)\\ 12000(1-y)=23040(1-x). & (2)\end{cases}$$

我们来解上面这个方程组．去括号经整理后得

$$\begin{cases}10800x+22000y=12000,\\ 23040x-12000y=11040.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x\approx 0.608,\\ y\approx 0.247.\end{cases}$$

那么

$$1-x=0.392,$$
$$1-y=0.753.$$

就是说，甲劳力一天中用 0.608 的时间挖掘，0.392 的时间挑运；乙劳力一天中用 0.247 的时间挖掘，0.753 的时间整理．

甲劳力一天中用 0.608 的时间挖掘，也相当于用 0.608 的甲劳力即 11 个 ($0.608\times18\approx11$) 挖掘一天，另外 7 个 ($18-11=7$) 甲劳力挑运一天．乙劳力一天中用 0.247 的时间挖掘，也相当于用 0.247 的乙劳力即 5 个 ($20\times0.247\approx5$) 挖掘一天，另外 15 个 ($20-5=15$) 乙劳力整理一天．

因此可以这样安排：11 个甲劳力和 5 个乙劳力挖掘，15 个乙劳力整理，7 个甲劳力挑运．

在实际工作中，情况是复杂的，这类计算可以作为参考．

练习

1．某公社化肥厂需要浓度是 60% 的硫酸 160 公斤．现用浓度为 20% 的回收废硫酸和浓度为 95% 的浓硫酸配制，各需多少斤？

2．某车站职工在批林批孔运动中，抓革命，促生产，进一步挖掘潜力．他们把轻、重货物适当搭配装车，使载重量与载货容积都得到充分利用．有一种货车，每节载重量是 60 吨，载货容积是 120 立方米，现在要装电动机和喷粉器．已知这两种货物包装后电动机每立方米可以装 0.7 吨，喷粉器每立方米可以装 0.2 吨．怎样合理搭配，才能充分利用货车的载重量和容积？

[1. 74.7斤，85.3斤. 2. 装电动机72立方米，喷粉器48立方米.]

五、直线型经验公式

在三大革命实践中，常常通过观察或实验，取得两个变量的实验数据，把它们列成表，作为点的坐标，画出函数的近似图象(经验曲线)，再根据近似图象的类型，建立两个变量间函数关系的近似表达式. 这种表达式称为经验公式.

如果经验曲线的形状大致是一条直线，那么它的经验公式有 $y=kx+b$ 的形式，这种类型的经验公式叫做直线型经验公式. 下面介绍直线型经验公式的求法.

【例 12】 土法生产的"九二〇"农药的含量，可以采用萤光比色法进行测定. "九二〇"在浓硫酸中转变为萤光物质，在紫外线照射下发出蓝色萤光，在一定范围内，萤光强度(由萤光比色计的读数表示)与"九二〇"浓度有一定关系. 利用这个关系可以根据萤光比色计的读数来确定"九二〇"的浓度. 某次实验得下列数据:

萤光比色计读数 (x)	26	38	49	58	74
每毫升溶液含"九二〇"微克数(y)	6	9	12	15	18

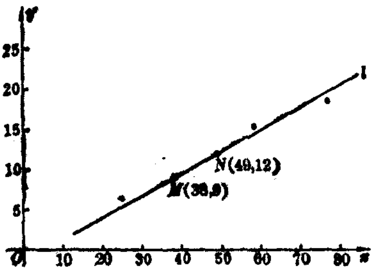


图 6-28

求出表示 x 与 y 间的关系的经验公式.

解: 把表中的对应数据作为点的坐标，在直角坐标系内作出这些点(图 6-28). 这些点大致在一条直线上，因此采用直线

型经验公式：

$$y=kx+b.$$

现在来确定 k 和 b 的数值.

用透明直尺的边缘在这些点之间移动，使通过所选两点的直线能够尽量地靠近其他各点，并且使直线两侧的点的数目大致相同，如图 6-28 中的直线 l，通过点 $M(38, 9)$ 和 $N(49, 12)$. 把这些点的坐标代入 $y=kx+b$，得到

$$\begin{cases}9=38k+b,\\12=49k+b.\end{cases}$$

解方程组，得

$$\begin{cases}k\approx 0.27,\\b\approx -1.26.\end{cases}$$

所以所求的经验公式为

$$y=0.27x-1.26.$$

这种由选择两点来求经验公式的方法叫做选点法.

选点法完全凭目测来调整直线的位置，精确度不高，但由于方法简便，所以实际中常被采用.

利用经验公式 $y=0.27x-1.26$，可以根据测得的萤光强度来确定"九二〇"的浓度. 例如，测得"九二〇"溶液的萤光比色计读数为 $x=65$，则可算得"九二〇"浓度为

$$y=0.27\times 65-1.26\approx 16.3,$$

即每毫升溶液含"九二〇" 16.3 微克.

下面再介绍在实际中常用的另一种求经验公式的方法，叫做平均值法.

在上例中，我们确定了所求经验公式为直线型后，把表中的各组对应的值分别代入 $y=kx+b$，得到 5 个关于 k, b 的二元一次方程. 把这些方程分成两组，一组 3 个方程，另一组 2

个方程(一般分组时，按自变量 x 的值的大小，顺次划分，使两组中方程的个数相同或相差一个)．把各组方程的两边分别相加，就得到两个二元一次方程，组成二元一次方程组．解出 k 和 b，从而得到所求的经验公式．

第一组	第二组
$6=26k+b$	$15=58k+b$
$9=38k+b$	$+)\ 18=74k+b$
$+)\ 12=49k+b$	$33=132k+2b$
$27=113k+3b$	

得方程组

$$\begin{cases}27=113k+3b,\\33=132k+2b.\end{cases}$$

解此方程组，得

$$\begin{cases}k=0.26,\\b=-0.66.\end{cases}$$

所以用平均值法求得的经验公式是

$$y=0.26x-0.66.$$

用平均值法求经验公式比较精确，但计算量较大．

根据经验公式 $y=0.26x-0.66$，当萤光比色计读数为 $x=65$ 时，可得

$$y=0.26\times65-0.66\approx16.2,$$

即每毫升溶液含"九二〇"16.2 微克．

练习

某生产队贫下中农总结出了一种根据小麦基本苗数推算有效穗数的方法．有一年他们在五块田上进行对比试验，在同样的肥料和管理水平下，取得如下数据：

	播种量 (11月18日)	基本苗数 (12月19日)	有效穗数 (5月5日)
1	25(斤/亩)	15(万/亩)	39.4(万/亩)
2	30	25.8	42.9
3	35	30	41
4	40	36.6	43.1
5	45	44.4	49.2

试以基本苗数为横坐标,有效穗数为纵坐标描出各点,用选点法和平均值法求出它们之间关系的经验公式.

[$y=0.32x+34.6$, $y=0.3x+34$.]

小　结

1. 二元一次方程组的一般形式为

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2.\end{cases}$$

能同时满足方程组中两个方程的一组 x, y 值,叫做该方程组的解.

2. 解二元一次方程组一般有代入消元法、加减消元法和图解法等.

3. 求直线型经验公式的步骤是:(1) 将实验数据列表;(2) 描点画经验曲线;(3) 如果所描得的经验曲线近似于直线,就用选点法或平均值法求出经验公式.

习　题

1. 解下列各方程组:

(1) $\begin{cases}9x+15y=315,\\12x+2y=366;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}3(x+2)+2y=7,\\5x-2(y-3)=13;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}0.6I_1+4I_2=1.5,\\2.5I_1-3I_2=0.35;\end{cases}$

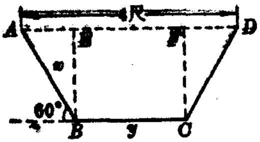
(4) $\begin{cases}\dfrac{t}{0.6}+4s=10.4,\\\dfrac{3t}{4}+0.5s=1\dfrac{19}{20};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{5},\\75\%x+40\%y=1.4.\end{cases}$

2. 农村中的赤脚医生常常自己配制一些药品。今把1.5%和4%的两种双氧水溶液，混合成含双氧水3%的溶液100毫升，供滴耳用，问两种溶液各需多少毫升？

3. 某轮船在试航中，顺水而下，每小时航行62里，逆水而上，每小时航行46里．问船速和水流速度各是多少？

4. 现有6尺宽的铁皮要制成一个水槽，使水槽的断面为等腰梯形$ABCD$，要求上口的宽$AD=4$尺，两腰AB，DC的倾斜角是60°，求AB和BC的长度．



(第4题)

5. “流速仪”是测定水流速度的仪器．它通过水流对叶片轮的作用，使叶片轮转动．叶片轮的转速与水流的速度，可以用一个直线型经验公式来表示．利用这个公式，可以根据仪器上读得的叶片轮转速来计算流速．现实际测得叶片轮的转速n与它们所对应的流速v之间的各组数据，如下表所示：

v (米/秒)	0.033	0.072	0.152	0.243	0.399	0.714	1.273	1.990	2.581
n (转/秒)	0.058	0.160	0.371	0.596	0.966	1.723	3.068	4.790	6.210

试用平均值法求出流速v与转速n的经验公式，并计算在$n=1.2$(转/秒)时的流速．

第五节　二元一次不等式

一、二元一次不等式

某农机厂要把一批长4000毫米的条形钢材，截成长518毫米和698毫米的两种毛坯各若干条．怎样截法才能使余料最少？

我们设每条钢材截成518毫米长的毛坯x条，截成698毫米长的毛坯y条，那么x和y应适合于方程

$$518x+698y=4000.$$

我们知道一个二元一次方程有无穷多组解．但这里 x，y 是两种规格毛坯的条数，所以需要的是正整数解．又因为截料时要使余料最少．并且考虑到截口的材料损耗，所以要找出正整数 x，y，使得

$$518x+698y\approx 4000,$$

并且

$$518x+698y<4000.$$

上式就是一个二元一次不等式．

二元一次不等式与二元一次方程有密切的关系．我们知道，二元一次方程的图形是直线．直线

$$y=kx+b \tag{1}$$

把坐标平面分成两个部分(图 6-29)，分别位于这直线的上方和下方．直线上任一点的坐标 (x_1, y_1) 适合于方程(1)，即

$$y_1=kx_1+b.$$

在点 (x_1, y_1) 的上方取一点 (x_1, y_2)，由于 $y_2>y_1$，于是

$$y_2>kx_1+b.$$

在点 (x_1, y_1) 的下方取一点 (x_1, y_3)，由于 $y_3<y_1$，于是

$$y_3<kx_1+b.$$

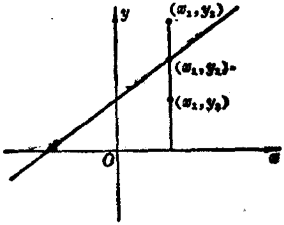


图 6-29

也就是说，位于直线上方的一切点的坐标，都适合于不等式

$$y>kx+b;$$

而位于直线下方的一切点的坐标，都适合于不等式

$$y<kx+b.$$

如果直线与 y 轴平行，即直线方程为 $x=a$ 时，位于直线

右方的一切点的坐标都适合于不等式 $x>a$，位于直线左方的一切点的坐标都适合于不等式 $x<a$.

利用直线的这一性质，我们就可以解二元一次不等式.

【例 1】 解不等式 $2x-y-3<0$.

解：将原不等式变形成

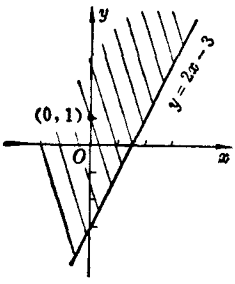


图 6-30

$$y>2x-3,$$

并作直线 $y=2x-3$. 在直线 $y=2x-3$ 上方的点的坐标适合于不等式 $y>2x-3$(图 6-30)，也就是适合于 $2x-y-3<0$，就是原不等式的解. 例如(0, 1)这一点在直线 $y=2x-3$ 的上方，所以 $x=0$, $y=1$ 是原不等式的一组解.

二、合理下料问题

现在我们来解决本节一开始提出的下料问题.

我们将 $518x+698y<4000$ 写成

$$y<-\frac{518}{698}x+\frac{4000}{698}. \tag{1}$$

作直线 $518x+698y-4000=0$ (图 6-31). 坐标适合于(1)式的点必定在这直线的下方. 因为我们需要的是适合于 $518x+698y\approx4000$ 的正整数解，所以应在第一象限内直线下方，找出与直线最接近的格点(横坐标和纵坐标都是整数的点). 从图上看，$A_1(7,0)$, $A_2(6,1)$, $A_3(5,2)$,

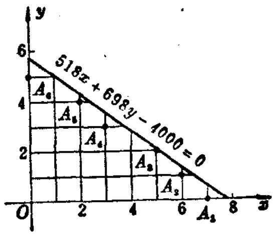


图 6-31

$A_4(3, 3)$, $A_5(2, 4)$, $A_6(0, 5)$等都是适合条件的点，它们代表各种截料的方法．要使余料最少，应取离直线最近的点$A_3(5, 2)$．

因此这条钢材应该截成518毫米长的5条和698毫米长的2条．这种截法是最合理的，材料利用率达到

$$\frac{518\times5+698\times2}{4000}=99.65\%,$$

而余料仅有$4000-(518\times5+698\times2)=14\,\text{mm}$．

在实际下料时，各种毛坯往往要求配套，在上例中，如果要求所截的518毫米与698毫米两种毛坯依1:3配套，应如何截料?

因为两种毛坯要依1:3配套，所以x, y的值应该满足关系式$y=3x$．

我们在图6-31上画直线$y=3x$，得到图6-32．从图上可以看出，点A_1，A_2，A_3，A_4，A_5在直线$y=3x$的一侧，而点A_6在另一侧．如果按照点A_1到A_5所代表的截料方法截料，518毫米的毛坯将过剩，而698毫米的毛坯将不足（因为$y<3x$）．如果按照点A_6所代表的截料方法截料，结果相反（因$y>3x$）．因此要满足配套要求，可采取配合截料的方法，通常是取靠近直线$y=3x$的两侧的点A_5，A_6来搭配．

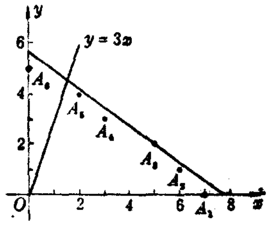


图 6-32

设取l根钢材用点A_5所代表的截料方法下料，那么可截得518毫米的毛坯$2l$根，698毫米的毛坯$4l$根；又设取m根钢材用点A_6所代表的截料方法下料，那么可截得698毫米的

毛坯 $5m$ 根．由配套要求，可知

$$\frac{2l}{4l+5m}=\frac{1}{3},$$

即
$$\frac{l}{m}=\frac{5}{2}.$$

所以取 5 条钢材用点 $A_5(2, 4)$ 所代表的方法下料，取 2 条钢材用点 $A_6(0,5)$ 所代表的方法下料，即可满足要求．其利用率为

$$\frac{2\times5\times518+(4\times5+5\times2)\times698}{7\times4000}=93.3\%.$$

三、二元一次不等式组

【例 2】 解不等式组

$$\begin{cases}-x+y-2>0,\\-2x+y+8<0.\end{cases}$$

解：将原不等式组变形成

$$\begin{cases}y>x+2,\\y<2x-8.\end{cases}$$

坐标适合于这个不等式组的点在直线 $y=x+2$ 的上方，并且在直线 $y=2x-8$ 的下方．在图 6-33 中，阴影部分的所有点的坐标都是原不等式组的解．

【例 3】 解不等式组

$$\begin{cases}y<x+1,\\y<-x+9,\\y>\frac{1}{3}x-1.\end{cases}$$

解：如图 6-34，作直线

$$AB:\ y=x+1,$$

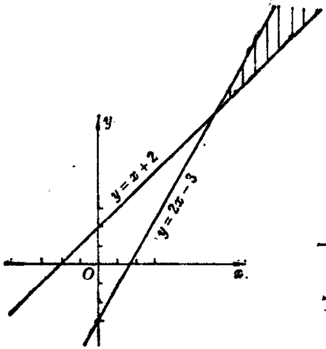


图 6-33

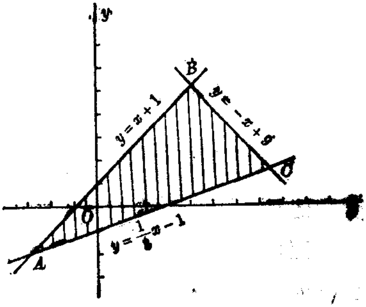


图 6-34

$$BC:\ y=-x+9,$$

$$CA:\ y=\frac{1}{3}x-1.$$

坐标适合于原不等式组的点,应在直线AB和BC的下方,而在直线CA的上方,就是图中$\triangle ABC$内部的点.

四、合理安排生产问题

【例 4】 某工厂生产M_1和M_2两种产品,根据要求,两种产品每天平均产量都不得低于15吨.已知生产每吨M_1需用煤9吨,电力4瓩,劳动力3个(按工作日计算);生产每吨M_2需用煤4吨,电力5瓩,劳动力10个.又知M_1每吨价值700元,M_2每吨价值1200元.但煤,电力和劳动力都有一定限度,每天用煤不得超过315吨,用电不得超过200瓩,劳动力最多只有300个.问每天生产M_1,M_2各多少吨,既能完成生产任务,又能使产值达到最大?

解:设每天生产x吨M_1,y吨M_2.由于煤、电力和劳动力都有一定限度,所以x和y必须满足下列各式:

$$\text{煤：}\quad 9x+4y\leqslant 315, \tag{1}$$

$$\text{电力：}\quad 4x+5y\leqslant 200, \tag{2}$$

$$\text{劳力：}\quad 3x+10y\leqslant 300. \tag{3}$$

当然 x 和 y 还不得小于 15，就是

$$x\geqslant 15, \tag{4}$$

$$y\geqslant 15. \tag{5}$$

而产值是

$$S=7x+12y(\text{百元}). \tag{6}$$

因此问题就是找出适合于条件(1)，(2)，(3)，(4)，(5)并且使 S 达到最大值的 x 和 y. 列出的限制条件都是一次不等式.

坐标适合于条件(1)，(2)，(3)，(4)，(5)的点，是在五条直线

$$9x+4y-315=0,$$
$$4x+5y-200=0,$$
$$3x+10y-300=0,$$
$$x=15,$$
$$y=15$$

所围区域的内部，包括边界线上的点，如图 6-35 中的阴影部分.

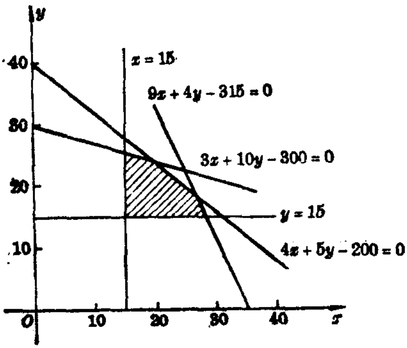


图 6-35

现在的问题是要在这部分中，找出使 $S=7x+12y$ 取最大值的点 (x, y).

考虑直线 $7x+12y=S$，就是

$$y=-\frac{7}{12}x+\frac{S}{12}.$$

使 S 逐渐由 0 增大，因为斜率不变，截距变大，直线 $7x+12y=S$ 就平行地向上移动，它和阴影部分相交的那一段上的点，

就是适合于条件(1)，(2)，(3)，(4)，(5)的点(图 6-36)。

因此问题中 S 的最大值，就是具有下列性质的 S_0：

(1) $7x+12y=S_0$ 与阴影部分有公共点.

(2) 当 $S>S_0$ 时，$7x+12y=S$ 与阴影部分没有公共点.

从图形上可以看到，这样的点是多边形的一个顶点，这个顶点就是直线

$$4x+5y-200=0$$

和 $3x+10y-300=0$

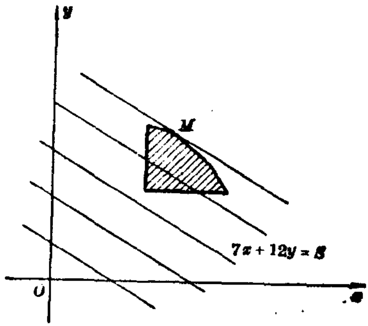


图 6-36

的交点 M. 解这个方程组，得到它们交点的坐标是(20, 24)。将这点的坐标 $x=20$, $y=24$ 代入方程(6)，就得到

$$S=428,$$

因此生产 20 吨 M_1, 24 吨 M_2 时，不仅超额完成计划，而且产值最大，达 428(百元).

在实际生产中，增产节约主要依靠广大群众执行毛主席的革命路线，数字的计算只能作为制订生产计划的参考.

小　　结

1. 直线 $y=kx+b$ 划分坐标平面为两部分. 直线上方的点的坐标满足不等式 $y>kx+b$; 直线下方的点的坐标满足不等式 $y<kx+b$.

2. 任意一个二元一次不等式 $ax+by+c>0$(或 <0)，可以化成

$$y>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\left(\text{或 } y<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}\right)$$

的形式，再根据直线的上述性质用图解法来解.

3. 在解二元一次不等式组时，用图解法分别找出坐标适合于每一

不等式的点所在的区域，取其公共部分.

习　　题

1. 划出平面上适合于下列条件的各点所在的区域：

   (1) $x+3y-5<0$;　　(2) $x+3y+7>0$;

   (3) $3x-y+9>0$;　　(4) $3x-y-3<0$.

2. 东风农具修配厂的工人师傅，要把 3420 毫米长的条钢截成 680 毫米和 272 毫米两种毛坯. 怎样下料最节省？利用率是多少？如果 680 毫米与 272 毫米两种毛坯按 1:2 配套，怎样下料最节省？

3. 用图解法解下列不等式组：

   (1) $\begin{cases} y-x>0, \\ y-2x<0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} y-x-2<0, \\ x-3<0, \\ y+1>0; \end{cases}$

   (3) $\begin{cases} x+y+3>0, \\ y-2x-4<0, \\ y+2x+4>0; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x-2y+1<0, \\ x+y-5<0, \\ 2x-y-1>0. \end{cases}$

附　　录

一、英文字母和希腊字母

1. 英文字母

大写	小写	读音	大写	小写	读音	大写	小写	读音
A	a	埃	J	j	杰	S	s	埃斯
B	b	比	K	k	凯	T	t	梯
C	c	西	L	l	埃尔	U	u	尤
D	d	迪	M	m	埃姆	V	v	维
E	e	伊	N	n	埃恩	W	w	达布柳
F	f	埃夫	O	o	奥	X	x	埃克斯
G	g	吉	P	p	皮	Y	y	怀
H	h	埃奇	Q	q	丘	Z	z	泽德
I	i	艾	R	r	阿			

2. 希腊字母

大写	小写	读　音	大写	小写	读　音	大写	小写	读　音
A	α	阿尔法	I	ι	约塔	P	ρ	若
B	β	贝塔	K	$\kappa(\varkappa)$	卡帕	Σ	$\sigma(\varsigma)$	西格马
Γ	γ	伽马	Λ	λ	兰布达	T	τ	套
Δ	δ	德耳塔	M	μ	米尤	Φ	φ	斐
E	ε	艾普西龙	N	ν	纽	X	χ	喜
Z	ζ	截塔	Ξ	ξ	克西	Υ	υ	宇普西龙
H	η	艾塔	O	o	奥密克戎	Ψ	ψ	普西
Θ	$\theta(\vartheta)$	西塔	Π	π	派	Ω	ω	欧米伽

二、常用计量单位

1. 长度

	名称	公里(千米)	百米	十米	米	分米	厘米	毫米	丝米	忽米	微米
公制	代号	km	hm	dam	m	dm	cm	mm	dmm	cmm	μ
	进率	1000米	100米	10米	10分米	10厘米	10毫米	10丝米	10忽米	10微米	

市制	1市里＝150市丈　1市丈＝10市尺　1市尺＝10市寸 1市寸＝10市分　1市分＝10市厘

公制市制换算：1米＝3市尺

2. 面积

	名称	平方公里	平方米	平方厘米	平方毫米
公制	代号	km^2	m^2	cm^2	mm^2
	进率	1000000平方米	10000平方厘米	100平方毫米	
	1公亩＝100平方米　1公顷＝100公亩				

市制	1平方市丈＝100平方市尺　1平方市尺＝100平方市寸
	1市亩＝60平方市丈＝6000平方市尺

公制市制换算：1亩＝666.7平方米　1平方米＝0.0015亩

3. 体积

名称	立方米	立方分米	立方厘米	立方毫米
代号	m^3	dm^3	cm^3	mm^3
进率	1000 立方分米	1000 立方厘米	1000 立方毫米	

4. 容量

名称	百升	十升	升	分升	厘升	毫升
代号	hl	dal	l	dl	cl	ml
进率	100 升	10 升	10 分升	10 厘升	10 毫升	

5. 重量

	名称	吨	公担	公斤	百克	十克	克	分克	厘克	毫克
公	代号	t	q	kg	hg	dag	g	dg	cg	mg
制	进率	1000公斤	100公斤	1000克	100克	10克	10分克	10厘克	10毫克	

市	1 市担 =100 市斤	1 市斤 =10 市两	1 市两 =10 市钱
制	1 市钱 =10 市分	1 市分 =10 市厘	

公制市制换算：1 公斤 =2 市斤

三、平方根表

被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	1.000	1.005	1.010	1.015	1.020	1.025	1.030	1.034	1.039	1.044	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.1	1.049	1.054	1.058	1.063	1.068	1.072	1.077	1.082	1.086	1.091	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.2	1.095	1.100	1.105	1.109	1.114	1.118	1.122	1.127	1.131	1.136	0	1	1	2	2	3	3	4	4
1.3	1.140	1.145	1.149	1.153	1.158	1.162	1.166	1.170	1.175	1.179	0	1	1	2	2	3	3	3	4
1.4	1.183	1.187	1.192	1.196	1.200	1.204	1.208	1.212	1.217	1.221	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1.5	1.225	1.229	1.233	1.237	1.241	1.245	1.249	1.253	1.257	1.261	0	1	1	2	2	2	3	3	4
1.6	1.265	1.269	1.273	1.277	1.281	1.285	1.288	1.292	1.296	1.300	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1.7	1.304	1.308	1.311	1.315	1.319	1.323	1.327	1.330	1.334	1.338	0	1	1	2	2	2	3	3	3
1.8	1.342	1.345	1.349	1.353	1.356	1.360	1.364	1.367	1.371	1.375	0	1	1	1	2	2	3	3	3
1.9	1.378	1.382	1.386	1.389	1.393	1.396	1.400	1.404	1.407	1.411	0	1	1	1	2	2	3	3	3
2.0	1.414	1.418	1.421	1.425	1.428	1.432	1.435	1.439	1.442	1.446	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.1	1.449	1.453	1.456	1.459	1.463	1.466	1.470	1.473	1.476	1.480	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.2	1.483	1.487	1.490	1.493	1.497	1.500	1.503	1.507	1.510	1.513	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.3	1.517	1.520	1.523	1.526	1.530	1.533	1.536	1.539	1.543	1.546	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.4	1.549	1.552	1.556	1.559	1.562	1.565	1.568	1.572	1.575	1.578	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.5	1.581	1.584	1.587	1.591	1.594	1.597	1.600	1.603	1.606	1.609	0	1	1	1	2	2	2	3	3
2.6	1.612	1.616	1.619	1.622	1.625	1.628	1.631	1.634	1.637	1.640	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2.7	1.643	1.646	1.649	1.652	1.655	1.658	1.661	1.664	1.667	1.670	0	1	1	1	2	2	2	2	3
2.8	1.673	1.676	1.679	1.682	1.685	1.688	1.691	1.694	1.697	1.700	0	1	1	1	1	2	2	2	3
2.9	1.703	1.706	1.709	1.712	1.715	1.718	1.720	1.723	1.726	1.729	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3.0	1.732	1.735	1.738	1.741	1.744	1.746	1.749	1.752	1.755	1.758	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3.1	1.761	1.764	1.766	1.769	1.772	1.775	1.778	1.780	1.783	1.786	0	1	1	1	1	2	2	2	3
3.2	1.789	1.792	1.794	1.797	1.800	1.803	1.806	1.808	1.811	1.814	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.3	1.817	1.819	1.822	1.825	1.828	1.830	1.833	1.836	1.838	1.841	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.4	1.844	1.847	1.849	1.852	1.855	1.857	1.860	1.863	1.865	1.868	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.5	1.871	1.873	1.876	1.879	1.881	1.884	1.887	1.889	1.892	1.895	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.6	1.897	1.900	1.903	1.905	1.908	1.910	1.913	1.916	1.918	1.921	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.7	1.924	1.926	1.929	1.931	1.934	1.936	1.939	1.942	1.944	1.947	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.8	1.949	1.952	1.954	1.957	1.960	1.962	1.965	1.967	1.970	1.972	0	1	1	1	1	2	2	2	2
3.9	1.975	1.977	1.980	1.982	1.985	1.987	1.990	1.992	1.995	1.997	0	1	1	1	1	2	2	2	2
4.0	2.000	2.002	2.005	2.007	2.010	2.012	2.015	2.017	2.020	2.022	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.1	2.025	2.027	2.030	2.032	2.035	2.037	2.040	2.042	2.045	2.047	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.2	2.049	2.052	2.054	2.057	2.059	2.062	2.064	2.066	2.069	2.071	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.3	2.074	2.076	2.078	2.081	2.083	2.086	2.088	2.090	2.093	2.095	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.4	2.098	2.100	2.102	2.105	2.107	2.110	2.112	2.114	2.117	2.119	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.5	2.121	2.124	2.126	2.128	2.131	2.133	2.135	2.138	2.140	2.142	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.6	2.145	2.147	2.149	2.152	2.154	2.156	2.159	2.161	2.163	2.166	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.7	2.168	2.170	2.173	2.175	2.177	2.179	2.182	2.184	2.186	2.189	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.8	2.191	2.193	2.195	2.198	2.20[illegible]	2.202	2.205	2.207	2.209	2.211	0	0	1	1	1	1	2	2	2
4.9	2.214	2.216	2.218	2.220	2.223	2.225	2.227	2.229	2.232	2.234	0	0	1	1	1	1	2	2	2
被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.0	2.236	2.238	2.241	2.243	2.245	2.247	2.249	2.252	2.254	2.256	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5.1	2.258	2.261	2.263	2.265	2.267	2.269	2.272	2.274	2.276	2.278	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5.2	2.280	2.283	2.285	2.287	2.289	2.291	2.293	2.296	2.298	2.300	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5.3	2.302	2.304	2.307	2.309	2.311	2.313	2.315	2.317	2.319	2.322	0	0	1	1	1	1	2	2	2
5.4	2.324	2.326	2.328	2.330	2.332	2.335	2.337	2.339	2.341	2.343	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.5	2.345	2.347	2.349	2.352	2.354	2.356	2.358	2.360	2.362	2.364	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.6	2.366	2.369	2.371	2.373	2.375	2.377	2.379	2.381	2.383	2.385	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.7	2.387	2.390	2.392	2.394	2.396	2.398	2.400	2.402	2.404	2.406	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.8	2.408	2.410	2.412	2.415	2.417	2.419	2.421	2.423	2.425	2.427	0	0	1	1	1	1	1	2	2
5.9	2.429	2.431	2.433	2.435	2.437	2.439	2.441	2.443	2.445	2.447	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.0	2.449	2.452	2.454	2.456	2.458	2.460	2.462	2.464	2.466	2.468	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.1	2.470	2.472	2.474	2.476	2.478	2.480	2.482	2.484	2.486	2.488	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.2	2.490	2.492	2.494	2.496	2.498	2.500	2.502	2.504	2.506	2.508	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.3	2.510	2.512	2.514	2.516	2.518	2.520	2.522	2.524	2.526	2.528	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.4	2.530	2.532	2.534	2.536	2.538	2.540	2.542	2.544	2.546	2.548	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.5	2.550	2.551	2.553	2.555	2.557	2.559	2.561	2.563	2.565	2.567	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.6	2.569	2.571	2.573	2.575	2.577	2.579	2.581	2.583	2.585	2.587	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.7	2.588	2.590	2.592	2.594	2.596	2.598	2.600	2.602	2.604	2.606	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.8	2.608	2.610	2.612	2.613	2.615	2.617	2.619	2.621	2.623	2.625	0	0	1	1	1	1	1	2	2
6.9	2.627	2.629	2.631	2.632	2.634	2.636	2.638	2.640	2.642	2.644	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.0	2.646	2.648	2.650	2.651	2.653	2.655	2.657	2.659	2.661	2.663	0	0	1	1	1	1	1	2	2
7.1	2.665	2.666	2.668	2.670	2.672	2.674	2.676	2.678	2.680	2.681	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.2	2.683	2.685	2.687	2.689	2.691	2.693	2.694	2.696	2.698	2.700	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.3	2.702	2.704	2.706	2.707	2.709	2.711	2.713	2.715	2.717	2.718	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.4	2.720	2.722	2.724	2.726	2.728	2.729	2.731	2.733	2.735	2.737	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.5	2.739	2.740	2.742	2.744	2.746	2.748	2.750	2.751	2.753	2.755	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.6	2.757	2.759	2.760	2.762	2.764	2.766	2.768	2.769	2.771	2.773	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.7	2.775	2.777	2.778	2.780	2.782	2.784	2.786	2.787	2.789	2.791	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.8	2.793	2.795	2.796	2.798	2.800	2.802	2.804	2.805	2.807	2.809	0	0	1	1	1	1	1	1	2
7.9	2.811	2.812	2.814	2.816	2.818	2.820	2.821	2.823	2.825	2.827	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.0	2.828	2.830	2.832	2.834	2.835	2.837	2.839	2.841	2.843	2.844	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.1	2.846	2.848	2.850	2.851	2.853	2.855	2.857	2.858	2.860	2.862	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.2	2.864	2.865	2.867	2.869	2.871	2.872	2.874	2.876	2.877	2.879	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.3	2.881	2.883	2.884	2.886	2.888	2.890	2.891	2.893	2.895	2.897	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.4	2.898	2.900	2.902	2.903	2.905	2.907	2.909	2.910	2.912	2.914	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.5	2.915	2.917	2.919	2.921	2.922	2.924	2.926	2.927	2.929	2.931	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.6	2.933	2.934	2.936	2.938	2.939	2.941	2.943	2.944	2.946	2.948	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.7	2.950	2.951	2.953	2.955	2.956	2.958	2.960	2.961	2.963	2.965	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.8	2.966	2.968	2.970	2.972	2.973	2.975	2.977	2.978	2.980	2.982	0	0	1	1	1	1	1	1	2
8.9	2.983	2.985	2.987	2.988	2.990	2.992	2.993	2.995	2.997	2.998	0	0	1	1	1	1	1	1	2
被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
9.0	3.000	3.002	3.003	3.005	3.007	3.008	3.010	3.012	3.013	3.015	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.1	3.017	3.018	3.020	3.022	3.023	3.025	3.027	3.028	3.030	3.032	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.2	3.033	3.035	3.036	3.038	3.040	3.041	3.043	3.045	3.046	3.048	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.3	3.050	3.051	3.053	3.055	3.056	3.058	3.059	3.061	3.063	3.064	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.4	3.066	3.068	3.069	3.071	3.072	3.074	3.076	3.077	3.079	3.081	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.5	3.082	3.084	3.085	3.087	3.089	3.090	3.092	3.094	3.095	3.097	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.6	3.098	3.100	3.102	3.103	3.105	3.106	3.108	3.110	3.111	3.113	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.7	3.114	3.116	3.118	3.119	3.121	3.122	3.124	3.126	3.127	3.129	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.8	3.130	3.132	3.134	3.135	3.137	3.138	3.140	3.142	3.143	3.145	0	0	0	1	1	1	1	1	1
9.9	3.146	3.148	3.150	3.151	3.153	3.154	3.156	3.158	3.159	3.161	0	0	0	1	1	1	1	1	1
10.	3.162	3.178	3.194	3.209	3.225	3.240	3.256	3.271	3.286	3.302	1	3	5	6	8	9	11	12	14
11.	3.317	3.332	3.347	3.362	3.376	3.391	3.406	3.421	3.435	3.450	1	3	4	6	7	9	10	12	13
12.	3.464	3.479	3.493	3.507	3.521	3.536	3.550	3.564	3.578	3.592	1	3	4	6	7	8	10	11	13
13.	3.606	3.619	3.633	3.647	3.661	3.674	3.688	3.701	3.715	3.728	1	3	4	5	7	8	10	11	12
14.	3.742	3.755	3.768	3.782	3.795	3.808	3.821	3.834	3.847	3.860	1	3	4	5	7	8	9	11	12
15.	3.873	3.886	3.899	3.912	3.924	3.937	3.950	3.962	3.975	3.987	1	3	4	5	6	8	9	10	11
16.	4.000	4.012	4.025	4.037	4.050	4.062	4.074	4.087	4.099	4.111	1	2	4	5	6	7	9	10	11
17.	4.123	4.135	4.147	4.159	4.171	4.183	4.195	4.207	4.219	4.231	1	2	4	5	6	7	8	10	11
18.	4.243	4.254	4.266	4.278	4.290	4.301	4.313	4.324	4.336	4.347	1	2	3	5	6	7	8	9	10
19.	4.359	4.370	4.382	4.393	4.405	4.416	4.427	4.438	4.450	4.461	1	2	3	5	6	7	8	9	10
20.	4.472	4.483	4.494	4.506	4.517	4.528	4.539	4.550	4.561	4.572	1	2	3	4	6	7	8	9	10
21.	4.583	4.593	4.604	4.615	4.626	4.637	4.648	4.658	4.669	4.680	1	2	3	4	5	6	8	9	10
22.	4.690	4.701	4.712	4.722	4.733	4.743	4.754	4.764	4.775	4.785	1	2	3	4	5	6	7	8	9
23.	4.796	4.806	4.817	4.827	4.837	4.848	4.858	4.868	4.879	4.889	1	2	3	4	5	6	7	8	9
24.	4.899	4.909	4.919	4.930	4.940	4.950	4.960	4.970	4.980	4.990	1	2	3	4	5	6	7	8	9
25.	5.000	5.010	5.020	5.030	5.040	5.050	5.060	5.070	5.079	5.089	1	2	8	4	5	6	7	8	9
26.	5.099	5.109	5.119	5.128	5.138	5.148	5.158	5.167	5.177	5.187	1	2	3	4	5	6	7	8	9
27.	5.196	5.206	5.215	5.225	5.235	5.244	5.254	5.263	5.273	5.282	1	2	3	4	5	6	7	8	9
28.	5.292	5.301	5.310	5.320	5.329	5.339	5.348	5.357	5.367	5.376	1	2	3	4	5	6	7	7	8
29.	5.385	5.394	5.404	5.413	5.422	5.431	5.441	5.450	5.459	5.468	1	2	3	4	5	5	6	7	8
30.	5.477	5.486	5.495	5.505	5.514	5.523	5.532	5.541	5.550	5.559	1	2	3	4	4	5	6	7	8
31.	5.568	5.577	5.586	5.595	5.604	5.612	5.621	5.630	5.639	5.648	1	2	3	3	4	5	6	7	8
32.	5.657	5.666	5.675	5.683	5.692	5.701	5.710	5.718	5.727	5.736	1	2	3	3	4	5	6	7	8
33.	5.745	5.753	5.762	5.771	5.779	5.788	5.797	5.805	5.814	5.822	1	2	3	3	4	5	6	7	8
34.	5.831	5.840	5.848	5.857	5.865	5.874	5.882	5.891	5.899	5.908	1	2	3	3	4	5	6	7	8
35.	5.916	5.925	5.933	5.941	5.950	5.958	5.967	5.975	5.983	5.992	1	2	2	3	4	5	6	7	8
36.	6.000	6.008	6.017	6.025	6.033	6.042	6.050	6.058	6.066	6.075	1	2	2	3	4	5	6	7	7
37.	6.083	6.091	6.099	6.107	6.116	6.124	6.132	6.140	6.148	6.156	1	2	2	3	4	5	6	7	7
38.	6.164	6.173	6.181	6.189	6.197	6.205	6.213	6.221	6.229	6.237	1	2	2	3	4	5	6	6	7
39.	6.245	6.253	6.261	6.269	6.277	6.285	6.293	6.301	6.309	6.317	1	2	2	3	4	5	6	6	7
被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40.	6.325	6.332	6.340	6.348	6.356	6.364	6.372	6.380	6.387	6.395	1	2	2	3	4	5	6	6	7
41.	6.403	6.411	6.419	6.427	6.434	6.442	6.450	6.458	6.465	6.473	1	2	2	3	4	5	5	6	7
42.	6.481	6.488	6.496	6.504	6.512	6.519	6.527	6.535	6.542	6.550	1	2	2	3	4	5	5	6	7
43.	6.557	6.565	6.573	6.580	6.588	6.595	6.603	6.611	6.618	6.626	1	2	2	3	4	5	5	6	7
44.	6.633	6.641	6.648	6.656	6.663	6.671	6.678	6.686	6.693	6.701	1	2	2	3	4	5	5	6	7
45.	6.708	6.716	6.723	6.731	6.738	6.745	6.753	6.760	6.768	6.775	1	1	2	3	4	4	5	6	7
46.	6.782	6.790	6.797	6.804	6.812	6.819	6.826	6.834	6.841	6.848	1	1	2	3	4	4	5	6	7
47.	6.856	6.863	6.870	6.877	6.885	6.892	6.899	6.907	6.914	6.921	1	1	2	3	4	4	5	6	7
48.	6.928	6.935	6.943	6.950	6.957	6.964	6.971	6.979	6.986	6.993	1	1	2	3	4	4	5	6	6
49.	7.000	7.007	7.014	7.021	7.029	7.036	7.043	7.050	7.057	7.064	1	1	2	3	4	4	5	6	6
50.	7.071	7.078	7.085	7.092	7.099	7.106	7.113	7.120	7.127	7.134	1	1	2	3	4	4	5	6	6
51.	7.141	7.148	7.155	7.162	7.169	7.176	7.183	7.190	7.197	7.204	1	1	2	3	3	4	5	6	6
52.	7.211	7.218	7.225	7.232	7.239	7.246	7.253	7.259	7.266	7.273	1	1	2	3	3	4	5	6	6
53.	7.280	7.287	7.294	7.301	7.308	7.314	7.321	7.328	7.335	7.342	1	1	2	3	3	4	5	5	6
54.	7.348	7.355	7.362	7.369	7.376	7.382	7.389	7.396	7.403	7.409	1	1	2	3	3	4	5	5	6
55.	7.416	7.423	7.430	7.436	7.443	7.450	7.457	7.463	7.470	7.477	1	1	2	3	3	4	5	5	6
56.	7.483	7.490	7.497	7.503	7.510	7.517	7.523	7.530	7.537	7.543	1	1	2	3	3	4	5	5	6
57.	7.550	7.556	7.563	7.570	7.576	7.583	7.589	7.596	7.603	7.609	1	1	2	3	3	4	5	5	6
58.	7.616	7.622	7.629	7.635	7.642	7.649	7.655	7.662	7.668	7.675	1	1	2	3	3	4	5	5	6
59.	7.681	7.688	7.694	7.701	7.707	7.714	7.720	7.727	7.733	7.740	1	1	2	3	3	4	4	5	6
60.	7.746	7.752	7.759	7.765	7.772	7.778	7.785	7.791	7.797	7.804	1	1	2	3	3	4	4	5	6
61.	7.810	7.817	7.823	7.829	7.836	7.842	7.849	7.855	7.861	7.868	1	1	2	3	3	4	4	5	6
62.	7.874	7.880	7.887	7.893	7.899	7.906	7.912	7.918	7.925	7.931	1	1	2	3	3	4	4	5	6
63.	7.937	7.944	7.950	7.956	7.962	7.969	7.975	7.981	7.987	7.994	1	1	2	3	3	4	4	5	6
64.	8.000	8.006	8.012	8.019	8.025	8.031	8.037	8.044	8.050	8.056	1	1	2	2	3	4	4	5	6
65.	8.062	8.068	8.075	8.081	8.087	8.093	8.099	8.106	8.112	8.118	1	1	2	2	3	4	4	5	6
66.	8.124	8.130	8.136	8.142	8.149	8.155	8.161	8.167	8.173	8.179	1	1	2	2	3	4	4	5	5
67.	8.185	8.191	8.198	8.204	8.210	8.216	8.222	8.228	8.234	8.240	1	1	2	2	3	4	4	5	5
68.	8.246	8.252	8.258	8.264	8.270	8.276	8.283	8.289	8.295	8.301	1	1	2	2	3	4	4	5	5
69.	8.307	8.313	8.319	8.325	8.331	8.337	8.343	8.349	8.355	8.361	1	1	2	2	3	4	4	5	5
70.	8.367	8.373	8.379	8.385	8.390	8.396	8.402	8.408	8.414	8.420	1	1	2	2	3	4	4	5	5
71.	8.426	8.432	8.438	8.444	8.450	8.456	8.462	8.468	8.473	8.479	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72.	8.485	8.491	8.497	8.503	8.509	8.515	8.521	8.526	8.532	8.538	1	1	2	2	3	3	4	5	5
73.	8.544	8.550	8.556	8.562	8.567	8.573	8.579	8.585	8.591	8.597	1	1	2	2	3	3	4	5	5
74.	8.602	8.608	8.614	8.620	8.626	8.631	8.637	8.643	8.649	8.654	1	1	2	2	3	3	4	5	5
75.	8.660	8.666	8.672	8.678	8.683	8.689	8.695	8.701	8.706	8.712	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76.	8.718	8.724	8.729	8.735	8.741	8.746	8.752	8.758	8.764	8.769	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77.	8.775	8.781	8.786	8.792	8.798	8.803	8.809	8.815	8.820	8.826	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78.	8.832	8.837	8.843	8.849	8.854	8.860	8.866	8.871	8.877	8.883	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79.	8.888	8.894	8.899	8.905	8.911	8.916	8.922	8.927	8.983	8.939	1	1	2	2	3	3	4	4	5
被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80.	8.944	8.950	8.955	8.961	8.967	8.972	8.978	8.983	8.989	8.994	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81.	9.000	9.006	9.011	9.017	9.022	9.028	9.033	9.039	9.044	9.050	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82.	9.055	9.061	9.066	9.072	9.077	9.083	9.088	9.094	9.099	9.105	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83.	9.110	9.116	9.121	9.127	9.132	9.138	9.143	9.149	9.154	9.160	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84.	9.165	9.171	9.176	9.182	9.187	9.192	9.198	9.203	9.209	9.214	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85.	9.220	9.225	9.230	9.236	9.241	9.247	9.252	9.257	9.263	9.268	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86.	9.274	9.279	9.284	9.290	9.295	9.301	9.306	9.311	9.317	9.322	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87.	9.327	9.333	9.338	9.343	9.349	9.354	9.359	9.365	9.370	9.375	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88.	9.381	9.386	9.391	9.397	9.402	9.407	9.413	9.418	9.423	9.429	1	1	2	2	3	3	4	4	5
89.	9.434	9.439	9.445	9.450	9.455	9.460	9.466	9.471	9.476	9.482	1	1	2	2	3	3	4	4	5
90.	9.487	9.492	9.497	9.503	9.508	9.513	9.518	9.524	9.529	9.534	1	1	2	2	3	3	4	4	5
91.	9.539	9.545	9.550	9.555	9.560	9.566	9.571	9.576	9.581	9.586	1	1	2	2	3	3	4	4	5
92.	9.592	9.597	9.602	9.607	9.612	9.618	9.623	9.628	9.633	9.638	1	1	2	2	3	3	4	4	5
93.	9.644	9.649	9.654	9.659	9.664	9.670	9.675	9.680	9.685	9.690	1	1	2	2	3	3	4	4	5
94.	9.695	9.701	9.706	9.711	9.716	9.721	9.726	9.731	9.737	9.742	1	1	2	2	3	3	4	4	5
95.	9.747	9.752	9.757	9.762	9.767	9.772	9.778	9.783	9.788	9.793	1	1	2	2	3	3	4	4	5
96.	9.798	9.803	9.808	9.813	9.818	9.823	9.829	9.834	9.839	9.844	1	1	2	2	3	3	4	4	5
97.	9.849	9.854	9.859	9.864	9.869	9.874	9.879	9.884	9.889	9.894	1	1	2	2	3	3	4	4	5
98.	9.899	9.905	9.910	9.915	9.920	9.925	9.930	9.935	9.940	9.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99.	9.950	9.955	9.960	9.965	9.970	9.975	9.980	9.985	9.990	9.995	0	1	1	2	2	3	3	4	4
被开方数 a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

从本表中可直接查出从 1 到 100 之间各个三位数的平方根．四位数的平方根要取表中后面"1～9"栏下的修正值加以修正．查法举例如下：

$\sqrt{8.25}=2.872$，（先在 a 栏下查出 8.2，横着向右查到上面标有 5 的一栏。）

$\sqrt{51.47}=7.174$，（先查出 51.4 的平方根 7.169，再加上同一横行里后一栏 7 的修正值 5．）

小于 1、大于 100 的数的平方根在表上不能查到，可移动被开方数的小数点，但必须向左（或向右）两位两位地移，使化成表上能查的数（a），查得平方根后，要把它的小数点相应地向右（或向左）一位一位地移动．

$\sqrt{987.4}=31.43$，（把小数点向左移动两位，即 9.874，查得平方根 3.143，把 3.143 向右移动一位，即得．）

$\sqrt{9874}=99.37$，（把小数点向左移动两位，即 98.74，查得平方根 9.937，把 9.937 向右移动一位，即得．）

$\sqrt{0.006852}=0.08277$．（把小数点向右移 4 位，即 68.52，查得平方根 8.277，把 8.277 向左移两位，即得．）

$\sqrt{0.06852}=0.2617$（把小数点向右移两位，即 6.852，查得平方根 2.617，把 2.617 向左移一位，即得。）

四、三角函数表

正弦函数表

α	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
											0.0000	90°			
0°	0.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9
2°	0349	0366	0384	0401	0419	0436	0454	0471	0488	0506	0523	87°	3	6	9
3°	0523	0541	0558	0576	0593	0610	0628	0645	0663	0680	0698	86°	3	6	9
4°	0698	0715	0732	0750	0767	0785	0802	0819	0837	0854	0.0872	85°	3	6	9
5°	0.0872	0889	0906	0924	0941	0958	0976	0993	1011	1028	1045	84°	3	6	9
6°	1045	1063	1080	1097	1115	1132	1149	1167	1184	1201	1219	83°	3	6	9
7°	1219	1236	1253	1271	1288	1305	1323	1340	1357	1374	1392	82°	3	6	9
8°	1392	1409	1426	1444	1461	1478	1495	1513	1530	1547	1564	81°	3	6	9
9°	1564	1582	1599	1616	1633	1650	1668	1685	1702	1719	0.1736	80°	3	6	9
10°	0.1736	1754	1771	1788	1805	1822	1840	1857	1874	1891	1908	79°	3	6	9
11°	1908	1925	1942	1959	1977	1994	2011	2028	2045	2062	2079	78°	3	6	9
12°	2079	2096	2113	2130	2147	2164	2181	2198	2215	2233	2250	77°	3	6	9
13°	2250	2267	2284	2300	2317	2334	2351	2368	2385	2402	2419	76°	3	6	8
14°	2419	2436	2453	2470	2487	2504	2521	2538	2554	2571	0.2588	75°	3	6	8
15°	0.2588	2605	2622	2639	2656	2672	2689	2706	2723	2740	2756	74°	3	6	8
16°	2756	2773	2790	2807	2823	2840	2857	2874	2890	2907	2924	73°	3	6	8
17°	2924	2940	2957	2974	2990	3007	3024	3040	3057	3074	3090	72°	3	6	8
18°	3090	3107	3123	3140	3156	3173	3190	3206	3223	3239	3256	71°	3	6	8
19°	3256	3272	3289	3305	3322	3338	3355	3371	3387	3404	0.3420	70°	3	5	8
20°	0.3420	3437	3453	3469	3486	3502	3518	3535	3551	3567	3584	69°	3	5	8
21°	3584	3600	3616	3633	3649	3665	3681	3697	3714	3730	3746	68°	3	5	8
22°	3746	3762	3778	3795	3811	3827	3843	3859	3875	3891	3907	67°	3	5	8
23°	3907	3923	3939	3955	3971	3987	4003	4019	4035	4051	4067	66°	3	5	8
24°	4067	4083	4099	4115	4131	4147	4163	4179	4195	4210	0.4226	65°	3	5	8
25°	0.4226	4242	4258	4274	4289	4305	4321	4337	4352	4368	4384	64°	3	5	8
26°	4384	4399	4415	4431	4446	4462	4478	4493	4509	4524	4540	63°	3	5	8
27°	4540	4555	4571	4586	4602	4617	4633	4648	4664	4679	4695	62°	3	5	8
28°	4695	4710	4726	4741	4756	4772	4787	4802	4818	4833	4848	61°	3	5	8
29°	4848	4863	4879	4894	4909	4924	4939	4955	4970	4985	0.5000	60°	3	5	8
30°	0.5000	5015	5030	5045	5060	5075	5090	5105	5120	5135	5150	59°	3	5	8
31°	5150	5165	5180	5195	5210	5225	5240	5255	5270	5284	5299	58°	2	5	7
32°	5299	5314	5329	5344	5358	5373	5388	5402	5417	5432	5446	57°	2	5	7
33°	5446	5461	5476	5490	5505	5519	5534	5548	5563	5577	5592	56°	2	5	7
34°	5592	5606	5621	5635	5650	5664	5678	5693	5707	5721	0.5736	55°	2	5	7
35°	0.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0.6428	50°	2	4	7
40°	0.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0.7071	45°	2	4	6
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	α	1′	2′	3′

余弦函数表

正弦函数表

α	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
45°	0.7071	7083	7096	7108	7120	7133	7145	7157	7169	7181	7193	44°	2	4	6
46°	7193	7206	7218	7230	7242	7254	7266	7278	7290	7302	7314	43°	2	4	6
47°	7314	7325	7337	7349	7361	7373	7385	7396	7408	7420	7431	42°	2	4	6
48°	7431	7443	7455	7466	7478	7490	7501	7513	7524	7536	7547	41°	2	4	6
49°	7547	7559	7570	7581	7593	7604	7615	7627	7638	7649	0.7660	40°	2	4	6
50°	0.7660	7672	7683	7694	7705	7716	7727	7738	7749	7760	7771	39°	2	4	6
51°	7771	7782	7793	7804	7815	7826	7837	7848	7859	7869	7880	38°	2	4	5
52°	7880	7891	7902	7912	7923	7934	7944	7955	7965	7976	7986	37°	2	4	5
53°	7986	7997	8007	8018	8028	8039	8049	8059	8070	8080	8090	36°	2	3	5
54°	8090	8100	8111	8121	8131	8141	8151	8161	8171	8181	0.8192	35°	2	3	5
55°	0.8192	8202	8211	8221	8231	8241	8251	8261	8271	8281	8290	34°	2	3	5
56°	8290	8300	8310	8320	8329	8339	8348	8358	8368	8377	8387	33°	2	3	5
57°	8387	8396	8406	8415	8425	8434	8443	8453	8462	8471	8480	32°	2	3	5
58°	8480	8490	8499	8508	8517	8526	8536	8545	8554	8563	8572	31°	2	3	5
59°	8572	8581	8590	8599	8607	8616	8625	8634	8643	8652	0.8660	30°	1	3	4
60°	0.8660	8669	8678	8686	8695	8704	8712	8721	8729	8738	8746	29°	1	3	4
61°	8746	8755	8763	8771	8780	8788	8796	8805	8813	8821	8829	28°	1	3	4
62°	8829	8838	8846	8854	8862	8870	8878	8886	8894	8902	8910	27°	1	3	4
63°	8910	8918	8926	8934	8942	8949	8957	8965	8973	8980	8988	26°	1	3	4
64°	8988	8996	9003	9011	9018	9026	9033	9041	9048	9056	0.9063	25°	1	3	4
65°	0.9063	9070	9078	9085	9092	9100	9107	9114	9121	9128	9135	24°	1	2	4
66°	9135	9143	9150	9157	9164	9171	9178	9184	9191	9198	9205	23°	1	2	3
67°	9205	9212	9219	9225	9232	9239	9245	9252	9259	9265	9272	22°	1	2	3
68°	9272	9278	9285	9291	9298	9304	9311	9317	9323	9330	9336	21°	1	2	3
69°	9336	9342	9348	9354	9361	9367	9373	9379	9385	9391	0.9397	20°	1	2	3
70°	0.9397	9403	9409	9415	9421	9426	9432	9438	9444	9449	9455	19°	1	2	3
71°	9455	9461	9466	9472	9478	9483	9489	9494	9500	9505	9511	18°	1	2	3
72°	9511	9516	9521	9527	9532	9537	9542	9548	9553	9558	9563	17°	1	2	3
73°	9563	9568	9573	9578	9583	9588	9593	9598	9603	9608	9613	16°	1	2	2
74°	9613	9617	9622	9627	9632	9636	9641	9646	9650	9655	0.9659	15°	1	2	2
75°	0.9659	9664	9668	9673	9677	9681	9686	9690	9694	9699	9703	14°	1	1	2
76°	9703	9707	9711	9715	9720	9724	9728	9732	9736	9740	9744	13°	1	1	2
77°	9744	9748	9751	9755	9759	9763	9767	9770	9774	9778	9781	12°	1	1	2
78°	9781	9785	9789	9792	9796	9799	9803	9806	9810	9813	9816	11°	1	1	2
79°	9816	9820	9823	9826	9829	9833	9836	9839	9842	9845	0.9848	10°	1	1	2
80°	0.9848	9851	9854	9857	9860	9863	9866	9869	9871	9874	9877	9°	0	1	1
81°	9877	9880	9882	9885	9888	9890	9893	9895	9898	9900	9903	8°	0	1	1
82°	9903	9905	9907	9910	9912	9914	9917	9919	9921	9923	9925	7°	0	1	1
83°	9925	9928	9930	9932	9934	9936	9938	9940	9942	9943	9945	6°	0	1	1
84°	9945	9947	9949	9951	9952	9954	9956	9957	9959	9960	0.9962	5°	0	1	1
85°	0.9962	9963	9965	9966	9968	9969	9971	9972	9973	9974	9976	4°	0	0	1
86°	9976	9977	9978	9979	9980	9981	9982	9983	9984	9985	9986	3°	0	0	0
87°	9986	9987	9988	9989	9990	9990	9991	9992	9993	9993	9994	2°	0	0	0
88°	9994	9995	9995	9996	9996	9997	9997	9997	9998	9998	0.9998	1°	0	0	0
89°	9998	9999	9999	9999	9999	0000	0000	0000	0000	0000	1.0000	0°	0	0	0
90°	1.0000														
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	α	1′	2′	3′

余弦函数表

正切函数表

α	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
											0.0000	90°			
0°	0.0000	0017	0035	0052	0070	0087	0105	0122	0140	0157	0175	89°	3	6	9
1°	0175	0192	0209	0227	0244	0262	0279	0297	0314	0332	0349	88°	3	6	9
2°	0349	0367	0384	0402	0419	0437	0454	0472	0489	0507	0524	87°	3	6	9
3°	0524	0542	0559	0577	0594	0612	0629	0647	0664	0682	0699	86°	3	6	9
4°	0699	0717	0734	0752	0769	0787	0805	0822	0840	0857	0.0875	85°	3	6	9
5°	0.0875	0892	0910	0928	0945	0963	0981	0998	1016	1033	1051	84°	3	6	9
6°	1051	1069	1086	1104	1122	1139	1157	1175	1192	1210	1228	83°	3	6	9
7°	1228	1246	1263	1281	1299	1317	1334	1352	1370	1388	1405	82°	3	6	9
8°	1405	1423	1441	1459	1477	1495	1512	1530	1548	1566	1584	81°	3	6	9
9°	1584	1602	1620	1638	1655	1673	1691	1709	1727	1745	0.1763	80°	3	6	9
10°	0.1763	1781	1799	1817	1835	1853	1871	1890	1908	1926	1944	79°	3	6	9
11°	1944	1962	1980	1998	2016	2035	2053	2071	2089	2107	2126	78°	3	6	9
12°	2126	2144	2162	2180	2199	2217	2235	2254	2272	2290	2309	77°	3	6	9
13°	2309	2327	2345	2364	2382	2401	2419	2438	2456	2475	2493	76°	3	6	9
14°	2493	2512	2530	2549	2568	2586	2605	2623	2642	2661	0.2679	75°	3	6	9
15°	0.2679	2698	2717	2736	2754	2773	2792	2811	2830	2849	2867	74°	3	6	9
16°	2867	2886	2905	2924	2943	2962	2981	3000	3019	3038	3057	73°	3	6	9
17°	3057	3076	3096	3115	3134	3153	3172	3191	3211	3230	3249	72°	3	6	10
18°	3249	3269	3288	3307	3327	3346	3365	3385	3404	3424	3443	71°	3	6	10
19°	3443	3463	3482	3502	3522	3541	3561	3581	3600	3620	0.3640	70°	3	7	10
20°	0.3640	3659	3679	3699	3719	3739	3759	3779	3799	3819	3839	69°	3	7	10
21°	3839	3859	3879	3899	3919	3939	3959	3979	4000	4020	4040	68°	3	7	10
22°	4040	4061	4081	4101	4122	4142	4163	4183	4204	4224	4245	67°	3	7	10
23°	4245	4265	4286	4307	4327	4348	4369	4390	4411	4431	4452	66°	3	7	10
24°	4452	4473	4494	4515	4536	4557	4578	4599	4621	4642	0.4663	65°	4	7	11
25°	0.4663	4684	4706	4727	4748	4770	4791	4813	4834	4856	4877	64°	4	7	11
26°	4877	4899	4921	4942	4964	4986	5008	5029	5051	5073	5095	63°	4	7	11
27°	5095	5117	5139	5161	5184	5206	5228	5250	5272	5295	5317	62°	4	7	11
28°	5317	5340	5362	5384	5407	5430	5452	5475	5498	5520	5543	61°	4	8	11
29°	5543	5566	5589	5612	5635	5658	5681	5704	5727	5750	0.5774	60°	4	8	12
30°	0.5774	5797	5820	5844	5867	5890	5914	5938	5961	5985	6009	59°	4	8	12
31°	6009	6032	6056	6080	6104	6128	6152	6176	6200	6224	6249	58°	4	8	12
32°	6249	6273	6297	6322	6346	6371	6395	6420	6445	6469	6494	57°	4	8	12
33°	6494	6519	6544	6569	6594	6619	6644	6669	6694	6720	6745	56°	4	8	13
34°	6745	6771	6796	6822	6847	6873	6899	6924	6950	6976	0.7002	55°	4	9	13
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	α	1′	2′	3′

余切函数表

正切函数表

α	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
35°	0.7002	7028	7054	7080	7107	7133	7159	7186	7212	7239	7265	54°	4	9	13
36°	7265	7292	7319	7346	7373	7400	7427	7454	7481	7508	7536	53°	5	9	14
37°	7536	7563	7590	7618	7646	7673	7701	7729	7757	7785	7813	52°	5	9	14
38°	7813	7841	7869	7898	7926	7954	7983	8012	8040	8069	8098	51°	5	9	14
39°	8098	8127	8156	8185	8214	8243	8273	8302	8332	8361	0.8391	50°	5	10	15
40°	0.8391	8421	8451	8481	8511	8541	8571	8601	8632	8662	8693	49°	5	10	15
41°	8693	8724	8754	8785	8816	8847	8878	8910	8941	8972	9004	48°	5	10	16
42°	9004	9036	9067	9099	9131	9163	9195	9228	9260	9293	9325	47°	6	11	16
43°	9325	9358	9391	9424	9457	9490	9523	9556	9590	9623	0.9657	46°	6	11	17
44°	9657	9691	9725	9759	9793	9827	9861	9896	9930	9965	1.0000	45°	6	11	17
45°	1.0000	0035	0070	0105	0141	0176	0212	0247	0283	0319	0355	44°	6	12	18
46°	0355	0392	0428	0464	0501	0538	0575	0612	0649	0686	0724	43°	6	12	18
47°	0724	0761	0799	0837	0875	0913	0951	0990	1028	1067	1106	42°	6	13	19
48°	1106	1145	1184	1224	1263	1303	1343	1383	1423	1463	1504	41°	7	13	20
49°	1504	1544	1585	1626	1667	1708	1750	1792	1833	1875	1.1918	40°	7	14	21
50°	1.1918	1960	2002	2045	2088	2131	2174	2218	2261	2305	2349	39°	7	14	22
51°	2349	2393	2437	2482	2527	2572	2617	2662	2708	2753	2799	38°	8	15	23
52°	2799	2846	2892	2938	2985	3032	3079	3127	3175	3222	3270	37°	8	16	24
53°	3270	3319	3367	3416	3465	3514	3564	3613	3663	3713	3764	36°	8	16	25
54°	3764	3814	3865	3916	3968	4019	4071	4124	4176	4229	1.4281	35°	9	17	26
55°	1.4281	4335	4388	4442	4496	4550	4605	4659	4715	4770	4826	34°	9	18	27
56°	4826	4882	4938	4994	5051	5108	5166	5224	5282	5340	5399	33°	10	19	29
57°	5399	5458	5517	5577	5637	5697	5757	5818	5880	5941	6003	32°	10	20	30
58°	6003	6066	6128	6191	6255	6319	6383	6447	6512	6577	6643	31°	11	21	32
59°	6643	6709	6775	6842	6909	6977	7045	7113	7182	7251	1.7321	30°	11	23	34
60°	1.732	1.739	1.746	1.753	1.760	1.767	1.775	1.782	1.789	1.797	1.804	29°	1	2	4
61°	1.804	1.811	1.819	1.827	1.834	1.842	1.849	1.857	1.865	1.873	1.881	28°	1	3	4
62°	1.881	1.889	1.897	1.905	1.913	1.921	1.929	1.937	1.946	1.954	1.963	27°	1	3	4
63°	1.963	1.971	1.980	1.988	1.997	2.006	2.014	2.023	2.032	2.041	2.050	26°	1	3	4
64°	2.050	2.059	2.069	2.078	2.087	2.097	2.106	2.116	2.125	2.135	2.145	25°	2	3	5
65°	2.145	2.154	2.164	2.174	2.184	2.194	2.204	2.215	2.225	2.236	2.246	24°	2	3	5
66°	2.246	2.257	2.267	2.278	2.289	2.300	2.311	2.322	2.333	2.344	2.356	23°	2	4	5
67°	2.356	2.367	2.379	2.391	2.402	2.414	2.426	2.438	2.450	2.463	2.475	22°	2	4	6
68°	2.475	2.488	2.500	2.513	2.526	2.539	2.552	2.565	2.578	2.592	2.605	21°	2	4	6
69°	2.605	2.619	2.633	2.646	2.660	2.675	2.689	2.703	2.718	2.733	2.747	20°	2	5	7
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	α	1′	2′	3′

余切函数表

正切函数表

α	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	
70°00′	2.747	2.750	2.752	2.755	2.757	2.760	2.762	2.765	2.767	2.770	2.773	50′
10′	2.773	2.775	2.778	2.780	2.783	2.785	2.788	2.790	2.793	2.795	2.798	40′
20′	2.798	2.801	2.803	2.806	2.808	2.811	2.814	2.816	2.819	2.821	2.824	30′
30′	2.824	2.827	2.829	2.832	2.834	2.837	2.840	2.842	2.845	2.848	2.850	20′
40′	2.850	2.853	2.856	2.858	2.861	2.864	2.866	2.869	2.872	2.874	2.877	10′
50′	2.877	2.880	2.882	2.885	2.888	2.891	2.893	2.896	2.899	2.901	2.904	19°00′
71°00′	2.904	2.907	2.910	2.912	2.915	2.918	2.921	2.924	2.926	2.929	2.932	50′
10′	2.932	2.935	2.937	2.940	2.943	2.946	2.949	2.952	2.954	2.957	2.960	40′
20′	2.960	2.963	2.966	2.969	2.971	2.974	2.977	2.980	2.983	2.986	2.989	30′
30′	2.989	2.992	2.994	2.997	3.000	3.003	3.006	3.009	3.012	3.015	3.018	20′
40′	3.018	3.021	3.024	3.027	3.030	3.033	3.036	3.039	3.042	3.045	3.047	10′
50′	3.047	3.050	3.053	3.056	3.060	3.063	3.066	3.069	3.072	3.075	3.078	18°00′
72°00′	3.078	3.081	3.084	3.087	3.090	3.093	3.096	3.099	3.102	3.105	3.108	50′
10′	3.108	3.112	3.115	3.118	3.121	3.124	3.127	3.130	3.133	3.137	3.140	40′
20′	3.140	3.143	3.146	3.149	3.152	3.156	3.159	3.162	3.165	3.168	3.172	30′
30′	3.172	3.175	3.178	3.181	3.185	3.188	3.191	3.194	3.198	3.201	3.204	20′
40′	3.204	3.207	3.211	3.214	3.217	3.221	3.224	3.227	3.230	3.234	3.237	10′
50′	3.237	3.240	3.244	3.247	3.251	3.254	3.257	3.261	3.264	3.267	3.271	17°00′
73°00′	3.271	3.274	3.278	3.281	3.285	3.288	3.291	3.295	3.298	3.302	3.305	50′
10′	3.305	3.309	3.312	3.316	3.319	3.323	3.326	3.330	3.333	3.337	3.340	40′
20′	3.340	3.344	3.347	3.351	3.354	3.358	3.362	3.365	3.369	3.372	3.376	30′
30′	3.376	3.380	3.383	3.387	3.390	3.394	3.398	3.401	3.405	3.409	3.412	20′
40′	3.412	3.416	3.420	3.423	3.427	3.431	3.435	3.438	3.442	3.446	3.450	10′
50′	3.450	3.453	3.457	3.461	3.465	3.469	3.472	3.476	3.480	3.484	3.487	16°00′
74°00′	3.487	3.491	3.495	3.499	3.503	3.507	3.511	3.514	3.518	3.522	3.526	50′
10′	3.526	3.530	3.534	3.538	3.542	3.546	3.550	3.554	3.558	3.562	3.566	40′
20′	3.566	3.570	3.574	3.578	3.582	3.586	3.590	3.594	3.598	3.602	3.606	30′
30′	3.606	3.610	3.614	3.618	3.622	3.626	3.630	3.635	3.639	3.643	3.647	20′
40′	3.647	3.651	3.655	3.660	3.664	3.668	3.672	3.676	3.681	3.685	3.689	10′
50′	3.689	3.693	3.698	3.702	3.706	3.710	3.715	3.719	3.723	3.728	3.732	15°00′
75°00′	3.732	3.736	3.741	3.745	3.749	3.754	3.758	3.763	3.767	3.772	3.776	50′
10′	3.776	3.780	3.785	3.789	3.794	3.798	3.803	3.807	3.812	3.816	3.821	40′
20′	3.821	3.825	3.830	3.834	3.839	3.844	3.848	3.853	3.857	3.862	3.867	30′
30′	3.867	3.871	3.876	3.881	3.885	3.890	3.895	3.899	3.904	3.909	3.914	20′
40′	3.914	3.918	3.923	3.928	3.933	3.938	3.942	3.947	3.952	3.957	3.962	10′
50′	3.962	3.967	3.971	3.976	3.981	3.986	3.991	3.996	4.001	4.006	4.011	14°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	α

余切函数表

正切函数表

α	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	
76°00′	4.011	4.016	4.021	4.026	4.031	4.036	4.041	4.046	4.051	4.056	4.061	50′
10′	4.061	4.066	4.071	4.076	4.082	4.087	4.092	4.097	4.102	4.107	4.113	40′
20′	4.113	4.118	4.123	4.128	4.134	4.139	4.144	4.149	4.155	4.160	4.165	30′
30′	4.165	4.171	4.176	4.181	4.187	4.192	4.198	4.203	4.208	4.214	4.219	20′
40′	4.219	4.225	4.230	4.236	4.241	4.247	4.252	4.258	4.264	4.269	4.275	10′
50′	4.275	4.280	4.286	4.292	4.297	4.303	4.309	4.314	4.320	4.326	4.331	13°00′
77°00′	4.331	4.337	4.343	4.349	4.355	4.360	4.366	4.372	4.378	4.384	4.390	50′
10′	4.390	4.396	4.402	4.407	4.413	4.419	4.425	4.431	4.437	4.443	4.449	40′
20′	4.449	4.455	4.462	4.468	4.474	4.480	4.486	4.492	4.498	4.505	4.511	30′
30′	4.511	4.517	4.523	4.529	4.536	4.542	4.548	4.555	4.561	4.567	4.574	20′
40′	4.574	4.580	4.586	4.593	4.599	4.606	4.612	4.619	4.625	4.632	4.638	10′
50′	4.638	4.645	4.651	4.658	4.665	4.671	4.678	4.685	4.691	4.698	4.705	12°00′
78°00′	4.705	4.711	4.718	4.725	4.732	4.739	4.745	4.752	4.759	4.766	4.773	50′
10′	4.773	4.780	4.787	4.794	4.801	4.808	4.815	4.822	4.829	4.836	4.843	40′
20′	4.843	4.850	4.857	4.864	4.872	4.879	4.886	4.893	4.901	4.908	4.915	30′
30′	4.915	4.922	4.930	4.937	4.945	4.952	4.959	4.967	4.974	4.982	4.989	20′
40′	4.989	4.997	5.005	5.012	5.020	5.027	5.035	5.043	5.050	5.058	5.066	10′
50′	5.066	5.074	5.081	5.089	5.097	5.105	5.113	5.121	5.129	5.137	5.145	11°00′
79°00′	5.145	5.153	5.161	5.169	5.177	5.185	5.193	5.201	5.209	5.217	5.226	50′
10′	5.226	5.234	5.242	5.250	5.259	5.267	5.276	5.284	5.292	5.301	5.309	40′
20′	5.309	5.318	5.326	5.335	5.343	5.352	5.361	5.369	5.378	5.387	5.396	30′
30′	5.396	5.404	5.413	5.422	5.431	5.440	5.449	5.458	5.466	5.475	5.485	20′
40′	5.485	5.494	5.503	5.512	5.521	5.530	5.539	5.549	5.558	5.567	5.576	10′
50′	5.576	5.586	5.595	5.605	5.614	5.623	5.633	5.642	5.652	5.662	5.671	10°00′
80°00′	5.671	5.681	5.691	5.700	5.710	5.720	5.730	5.740	5.749	5.759	5.769	50′
10′	5.769	5.779	5.789	5.799	5.810	5.820	5.830	5.840	5.850	5.861	5.871	40′
20′	5.871	5.881	5.892	5.902	5.912	5.923	5.933	5.944	5.954	5.965	5.976	30′
30′	5.976	5.986	5.997	6.008	6.019	6.030	6.041	6.051	6.062	6.073	6.084	20′
40′	6.084	6.096	6.107	6.118	6.129	6.140	6.152	6.163	6.174	6.186	6.197	10′
50′	6.197	6.209	6.220	6.232	6.243	6.255	6.267	6.278	6.290	6.302	6.314	9°00′
81°00′	6.314	6.326	6.338	6.350	6.362	6.374	6.386	6.398	6.410	6.423	6.435	50′
10′	6.435	6.447	6.460	6.472	6.485	6.497	6.510	6.522	6.535	6.548	6.561	40′
20′	6.561	6.573	6.586	6.599	6.612	6.625	6.638	6.651	6.665	6.678	6.691	30′
30′	6.691	6.704	6.718	6.731	6.745	6.758	6.772	6.786	6.799	6.813	6.827	20′
40′	6.827	6.841	6.855	6.869	6.883	6.897	6.911	6.925	6.940	6.954	6.968	10′
50′	6.968	6.983	6.997	7.012	7.026	7.041	7.056	7.071	7.085	7.100	7.115	8°00′
82°00′	7.115	7.130	7.146	7.161	7.176	7.191	7.207	7.222	7.238	7.253	7.269	50′
10′	7.269	7.284	7.300	7.316	7.332	7.348	7.364	7.380	7.396	7.412	7.429	40′
20′	7.429	7.445	7.462	7.478	7.495	7.511	7.528	7.545	7.562	7.579	7.596	30′
30′	7.596	7.613	7.630	7.647	7.665	7.682	7.700	7.717	7.735	7.753	7.770	20′
40′	7.770	7.788	7.806	7.824	7.842	7.861	7.879	7.897	7.916	7.934	7.953	10′
50′	7.953	7.972	7.991	8.009	8.028	8.048	8.067	8.086	8.105	8.125	8.144	7°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	α

余切函数表

正切函数表

α	0′	1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′	10′	
83°00′	8.144	8.164	8.184	8.204	8.223	8.243	8.264	8.284	8.304	8.324	8.345	50′
10′	8.345	8.366	8.386	8.407	8.428	8.449	8.470	8.491	8.513	8.534	8.556	40′
20′	8.556	8.577	8.599	8.621	8.643	8.665	8.687	8.709	8.732	8.754	8.777	30′
30′	8.777	8.800	8.823	8.846	8.869	8.892	8.915	8.939	8.962	8.986	9.010	20′
40′	9.010	9.034	9.058	9.082	9.106	9.131	9.156	9.180	9.205	9.230	9.255	10′
50′	9.255	9.281	9.306	9.332	9.357	9.383	9.409	9.435	9.461	9.488	9.514	6°00′
84°00′	9.514	9.541	9.568	9.595	9.622	9.649	9.677	9.704	9.732	9.760	9.788	50′
10′	9.788	9.816	9.845	9.873	9.902	9.931	9.960	9.989	10.02	10.05	10.08	40′
20′	10.08	10.11	10.14	10.17	10.20	10.23	10.26	10.29	10.32	10.35	10.39	30′
30′	10.39	10.42	10.45	10.48	10.51	10.55	10.58	10.61	10.64	10.68	10.71	20′
40′	10.71	10.75	10.78	10.81	10.85	10.88	10.92	10.95	10.99	11.02	11.06	10′
50′	11.06	11.10	11.13	11.17	11.20	11.24	11.28	11.32	11.35	11.39	11.43	5°00′
85°00′	11.43	11.47	11.51	11.55	11.59	11.62	11.66	11.70	11.74	11.79	11.83	50′
10′	11.83	11.87	11.91	11.95	11.99	12.03	12.08	12.12	12.16	12.21	12.25	40′
20′	12.25	12.29	12.34	12.38	12.43	12.47	12.52	12.57	12.61	12.66	12.71	30′
30′	12.71	12.75	12.80	12.85	12.90	12.95	13.00	13.05	13.10	13.15	13.20	20′
40′	13.20	13.25	13.30	13.35	13.40	13.46	13.51	13.56	13.62	13.67	13.73	10′
50′	13.73	13.78	13.84	13.89	13.95	14.01	14.07	14.12	14.18	14.24	14.30	4°00′
86°00′	14.30	14.36	14.42	14.48	14.54	14.61	14.67	14.73	14.80	14.86	14.92	50′
10′	14.92	14.99	15.06	15.12	15.19	15.26	15.33	15.39	15.46	15.53	15.60	40′
20′	15.60	15.68	15.75	15.82	15.89	15.97	16.04	16.12	16.20	16.27	16.35	30′
30′	16.35	16.43	16.51	16.59	16.67	16.75	16.83	16.92	17.00	17.08	17.17	20′
40′	17.17	17.26	17.34	17.43	17.52	17.61	17.70	17.79	17.89	17.98	18.07	10′
50′	18.07	18.17	18.27	18.37	18.46	18.56	18.67	18.77	18.87	18.98	19.08	3°00′
87°00′	19.08	19.19	19.30	19.41	19.52	19.63	19.74	19.85	19.97	20.09	20.21	50′
10′	20.21	20.33	20.45	20.57	20.69	20.82	20.95	21.07	21.20	21.34	21.47	40′
20′	21.47	21.61	21.74	21.88	22.02	22.16	22.31	22.45	22.60	22.75	22.90	30′
30′	22.90	23.06	23.21	23.37	23.53	23.69	23.86	24.03	24.20	24.37	24.54	20′
40′	24.54	24.72	24.90	25.08	25.26	25.45	25.64	25.83	26.03	26.23	26.43	10′
50′	26.43	26.64	26.84	27.06	27.27	27.49	27.71	27.94	28.17	28.40	28.64	2°00′
88°00′	28.64	28.88	29.12	29.37	29.62	29.88	30.14	30.41	30.68	30.96	31.24	50′
10′	31.24	31.53	31.82	32.12	32.42	32.73	33.05	33.37	33.69	34.03	34.37	40′
20′	34.37	34.72	35.07	35.43	35.80	36.18	36.56	36.96	37.36	37.77	38.19	30′
30′	38.19	38.62	39.06	39.51	39.97	40.44	40.92	41.41	41.92	42.43	42.96	20′
40′	42.96	43.51	44.07	44.64	45.23	45.83	46.45	47.09	47.74	48.41	49.10	10′
50′	49.10	49.82	50.55	51.30	52.08	52.88	53.71	54.56	55.44	56.35	57.29	1°00′
89°00′	57.29	58.26	59.27	60.31	61.38	62.50	63.66	64.86	66.11	67.40	68.75	50′
10′	68.75	70.15	71.62	73.14	74.73	76.39	78.13	79.94	81.85	83.84	85.94	40′
20′	85.94	88.14	90.46	92.91	95.49	98.22	101.1	104.2	107.4	110.9	114.6	30′
30′	114.6	118.5	122.8	127.3	132.2	137.5	143.2	149.5	156.3	163.7	171.9	20′
40′	171.9	180.9	191.0	202.2	214.9	229.2	245.6	264.4	286.5	312.5	343.8	10′
50′	343.8	382.0	429.7	491.1	573.0	687.5	859.4	1146	1719	3438		0°00′
	10′	9′	8′	7′	6′	5′	4′	3′	2′	1′	0′	α

余切函数表

正弦、余弦表是从 $0°$ 到 $90°$ 每差 $6'$ 各角的正弦、余弦函数值．左边第一直行和顶上第一横行是查正弦用的（表中 $89°$ 横行中 $30'$ 到 $60'$ 的函数值下面划有横线，表示它的整数部分与下一横行相同，是 1 不是 0）；右边第四直行和底下第一横行是查余弦用的．表的后栏（右边三直行）是修正值．

如查 $\sin 75°30'$．先在左边第一直行"a"栏下查出 $75°$，横着向右查到顶上标有 $30'$ 的直行，就得 $\sin 75°30'=0.9681$（我们已知道，正弦、余弦值最大等于1）．又如查 $\sin 75°32'$．先查得 $\sin 75°30'=0.9681$（小 $2'$），再在同一横行后一栏修正值标有 $2'$ 的直行得 1，这是 0.0001，所以 $\sin 75°32'=0.9681+0.0001=0.9682$．又如查 $\sin 75°34'$，可先查出 $\sin 75°36'$（大 $2'$），得 0.9686．再横向在修正值标有 $2'$ 的直行得 1，这是 0.0001，所以 $\sin 75°34'=0.9686-0.0001=0.9685$．

如查 $\cos 18°39'$．可从表中右边标有"a"的直行查出 $18°$，横着向左查到底下标有 $36'$（小 $3'$）的直行得 0.9478，再向右查到后一栏标有 $3'$ 的直行得 3，这是 0.0003，所以 $\cos 18°39'=0.9478-0.0003=0.9475$（注意，这里余弦要减去修正值！）．如果我们先查 $\cos 18°42'$（大 $3'$），得 0.9472，再查得 $3'$ 的修正值 0.0003，此时 $\cos 18°39'=0.9472+0.0003=0.9475$．

正切表是从 $0°$ 到 $70°$ 每差 $6'$ 和从 $70°$ 到 $90°$ 每差 $1'$ 各角的正切函数值．前者有修正值，后者则没有．查法同上．

余切表是从 $0°$ 到 $20°$ 每差 $1'$ 和从 $20°$ 到 $90°$ 每差 $6'$ 的余切函数值．后者有修正值．查法同上．

已知一个角的正弦、余弦、正切或余切函数值，也可利用这些表，反过来查出这个角来．

五、习题答案

第一章

第一节　4. (1) a^2;　(2) $\frac{1}{2}a^3$;　(3) $a+\frac{a}{2}$;　(4) $(a+3)^2$.

5. $C=2b+2\pi a=400\text{ m}$.

第二节　1. -0.65, 0.618, $-\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$.　2. $\frac{1}{2}$, 3.5, $1\frac{1}{2}$, 6.

6. $0.1>-100$,　$-17.5>-18$,　$-\frac{4}{5}<-\frac{3}{4}$.

第三节　2. (1) 37;　(2) $\frac{4}{7}$.　3. 0.025.　4. 1341 斤.

第四节　1. (1) 150;　(2) 0.6×10^4;　(3) 0.4;　(4) 0.036;　(5) 28.5.　2. 10.8 米.　3. (1) 5;　(2) 7.2.

第五节　1. 177.3 平方米.　2. 26.38 立方米，约 29 吨.　3. 0.19 立方米，11.4 立方米，684 立方米.　4. 66 车.　5. 15000 株.　7. 可取 5×4.

第　二　章

第一节　1. $4x-y-7xy$.　2. (1) $60a^4c^5d^7$;　(2) $-18yu+15yv$;　(3) $9kx^2y^3z^3-18kxy^2z^4$;　(4) $18uv-24u+21v-28$;　(5) x^9-x^5.　3. (1) $4y^2-4y+1$;　(2) $81p^4+54p^2q^2+9q^4$;　(3) $9t^2-1$;　(4) $8x^3+y^6$;　(5) $8x^3+60x^2y+150xy^2+125y^3$.　4. (1) $(5u-6v)(5u+6v)$;　(2) $(4v-1)(16v^2+4v+1)$;　(3) $(m+n)(m-n)(m^2+mn+n^2)(m^2-mn+n^2)$;　(4) $(3x+1)^3$;　(5) $(x-y+z)(x+y-z)$;　(6) $(p+q+r-8)(p+q+r+8)$;　(7) $(s+2)(s-2)(s+5)$.　5. 0.942 立方米.

第二节　1. (1) $\frac{5xy^2+4x^2y+50}{10x^3y^3}$;　(2) $\frac{21p+2q}{66pq^3}$;　(3) $-\frac{2(u^2+8u+10)}{(u-2)^2(u^2+2u+4)}$.　2. (1) $-\frac{108x^3y^4}{5}$;　(2) $\frac{7}{4}(x^2+x-6)$;　(3) $\frac{2}{3q}$;　(4) -1.　3. $\frac{Nn}{m(m-n)}$，4 亩.　4. $\frac{Rmn}{am+bn}$.

第三节　1. (1) $6\sqrt{3}$;　(2) 0;　(3) $2\sqrt{6}-\frac{1}{5}\sqrt{5}+4\sqrt{7}$;　(4) $363x$;　(5) $28-10\sqrt{3}$;　(6) 3;　(7) $\sqrt{2}$;　(8) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}$.　2. $\frac{1}{3}h(3a^2+b^2)$.　3. 0.1 方.

第四节　1. (1) 2;　(2) $\frac{17}{12}$.　2. $h=\frac{v_1}{\pi r_1^2}$.　3. 53 公里/时.　4. (1) $x>-2$;　(2) $x>15$.　5. 3 亩.　6. 1445 亩，670 亩，135 亩.

第五节 1. 75%. 2. 80%. 3. 60%. 4. 7.5斤. 5. $\frac{1}{4}$斤.

6. 100公斤, 200公斤, 300公斤. 7. 36cm.

第 三 章

第一节 1. (1) $\frac{7}{4}$; (2) 1. 2. 15.39米. 3. $\angle A=20°28'<30°$, 坦克可翻越这座山. 4. 1374米. 5. 11°29'. 6. 23°58'. 7. 2°29' 8. 34°. 9、175米.

第二节 1. (1) $\angle A=50°$, $b=22.61$, $c=24.53$; (2) $\angle B=12°13'$, $\angle C=146°17'$, $c=12.72$; (3) $\angle A=15°$, $\angle B=45°$, $c=\sqrt{6}$; (4) $\angle C=90°$, $\angle A=30°$, $\angle B=60°$. 2. 1341米, 1249米. 3. 52.86米. 4. 11°18'. 5. 59.82毫米. 6. (1) 3.28米; (2) 7.98米. 7. 57°41'. 8. 42.2毫米, 52.1毫米.

第三节 1. 27.15公里. 2. $EF=330\text{mm}$, $HN=220\text{mm}$. 3. $\varphi_1=2.1\text{m}$, $\varphi_2=3\text{m}$. 5. 4平方公里. 6. 10.5米. 7. 54.8厘米.

第四节 6. 4275吨.

第 四 章

第二节 1. $h_B=3.199\text{m}$. 2. $h_B=4.401\text{m}$.

第 五 章

第一节 1. (1) +; (2) +; (3) −. 2. (1) $\frac{7}{4}$; (2) 0; (3) 0. 3. $A(-303.1, 175)$, $B(-318.2, -318.2)$, $C(175, -303.1)$, $D(389.7, -225)$. 4. 7.6毫米. 5. 381毫米.

6. (1) $1^{-}\doteq\left(\frac{3}{50}\right)^{\circ}$; (4) 50^{-}. 7. 1.73安培.

8. $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}=3.078$.

第二节 1. (1) $\frac{24}{25}$, -1; (2) $-\frac{220}{221}$. 2. 0.0188. 3. $\theta=45°$.

4. $I_0=0$.　6. $d=141.9\text{m}$, $h=75.4\text{m}$.

第　六　章

第一节　1. (1) 一切实数; (2) $x\neq 2$ 的实数; (3) $-2<x<3$ 的实数.　2. 7; $-\frac{1}{2}$; 3.　3. $C=\frac{t}{106}$.　4. $y=2x+12$.

5. (2) 3, $Q\ 1\to 3$ H 变大, $Q\ 3\to 14$ H 变小.

第二节　1. $t=15+20n$.

第三节　1. (1) $k=1, \alpha=45°$; (2) $k=-\sqrt{3}, \alpha=120°$.　2. (1) $1.1918x-y+4.6164=0$; (2) $2x+2y+5=0$; (3) $7x+6y+22=0$; (4) $x-2y-4=0$; (5) $3x-y-15=0$; (6) $3x+2y-6=0$.

3. $3x-2y-3=0$.　4. $2.747x+y-7.247=0$.　5. $\frac{5}{3}$.　6. 95.9 毫米.　7. 10.6 毫米.

第四节　1. (1) $\begin{cases}x=30,\\y=3;\end{cases}$ (2) $\begin{cases}x=1,\\y=-1;\end{cases}$ (3) $\begin{cases}I_1=0.5,\\I_2=0.3;\end{cases}$ (4) $\begin{cases}t=1.2,\\s=2.1;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=\frac{4}{5},\\y=2.\end{cases}$　2. 40 毫升, 60 毫升.　3. 54 里/小时, 8 里/小时.

4. 2 尺, 2 尺.　5. $v=0.415n+0.001$, 0.499 米/秒.

第五节　2. 3, 5, 99.4%; 取 1 条用点(2, 7)方法截, 3 条用点(3, 5)方法截, 98%.